

数学规律教学中挑战性问题设计探索

——以“正方体表面积变化”为例

杨莉

上海市子长学校，上海 200065

摘要：数学规律的发现和探索是培育学生数学核心素养一个重要的载体，教师通过挑战性问题引导学生经历数学规律的发现、猜测、归纳、验证、应用的建构过程，发展学生的概括、归纳等能力，积累数学活动经验，培育学生的数学意识。

关键词：数学规律；挑战性问题；数学意识

Design and exploration of challenging problems in mathematical law teaching -- Take "cube surface area change" as an example

Yang Li

Shanghai Zichang School, Shanghai 200065

Abstract : The discovery and exploration of mathematical laws is an important carrier to cultivate students' mathematical core literacy. Teachers guide students through the construction process of the discovery, speculation, induction, verification and application of mathematical laws through challenging questions, develop students' ability of generalization and induction, accumulate experience in mathematical activities, and cultivate students' mathematical awareness.

Keywords : mathematical law; challenging problem; mathematical consciousness

《数学课程标准（2022版）》指出：“通过经历独立的数学思维过程，学生能够探究自然现象或现实情境所蕴含的数学规律，经历数学“再发现”的过程。”数学规律的发现和探索是培育学生数学核心素养一个重要的载体，如何在数学规律教学中，让学生经历发现、探索、思考、提炼的学习过程呢？设计挑战性问题可以触发学生的非智力因素，激发学生的学习兴趣，引导学生在积极参与深度学习中发现和提炼数学规律，在解决问题的过程中掌握规律、应用规律解决新问题。本文以“正方体的表面积变化”为例谈谈自己实践探索的一些体会^①。

一、挑战性问题的设计依据

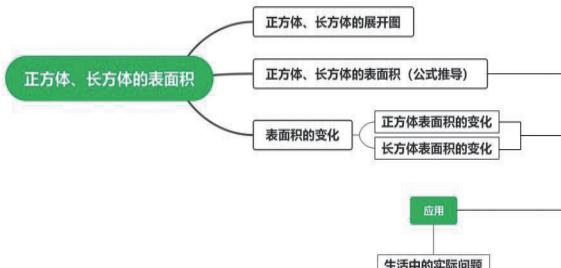
（一）数学规律教学的要求

数学中蕴含很多规律，无处不在，但规律都是蕴藏在数学的数据或图形中的，不会直接呈现在学生面前，需要学生通过各种方法各种途径去探索、发现、猜测、验证，才能找出规律。数学规律教学课就让学生经历从问题出发，通过观察、动手操作、计算等多种路径形成猜想，运用分类枚举、实验论证、推理论证等方法对猜想进行获得结论的过程。教师要根据数学规律探究中枚举研究的关键教学环节引入问题、形成猜想、验证结论、归纳规律、解决问题设计有探索性和开放性的挑战性问题，引导学生开展体验性、操作性的活动，让学生在活动中尝试、思考、交流，归纳出数学规律，抽象出数学模型。

（二）单元学习的要求

“正方体、长方体的表面积”单元知识结构如下图，围绕正方体长方体的展开图、正方体长方体的表面积计算、表面积的变化规律这三个核心内容展开，本单元的核心问题是如何计算正方体、长方体的表面积，通过探索正方体、长方体的表面积计算方法，掌握计算公式，形成“抓特征——找联系——推公式”的过

程结构，为学生后续主动学习提供多样化的结构支撑；同时在动手实践操作中，探索正方体、长方体拼接前后的联系，发现表面积的变化规律，形成“多角度——抓本质——试转化”的方法结构。要根据单元教学要求和学生的认知基础整体设计挑战性问题，推动学生开展深度学习，促进数学核心素养培育真正落地^②。



（三）课时学习目标的要求

《正方体表面积变化》是沪教版五年级第二学期内容，研究通过几个相同的正方体拼接，引导学生发现并理解表面积变化规律，并让学生应用发现的规律解决一些简单的实际问题。结合数学规律教学的要求和单元学习目标制定本课时的学习目标，设计挑战性问题，构建“教—学—评”一致性的数学课堂。

1. 学习目标

通过分析课程标准和教材，“正方体表面积”的学习目标是：

(1) 通过把几个同样的正方体拼接成长方体的操作过程，探索拼接前后表面积的变化规律，积累探索数学问题的经验，发展数学思维。

(2) 通过操作、计算、比较、归纳，探索多个相同的立方体叠放后表面积最小的优化策略，体会数学与生活的联系，获得解决问题的成功体验。

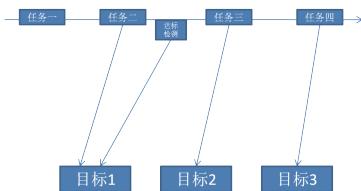
(3) 经历在一个正方体中切掉一个小正方体的活动，探索表面积的变化情况，理解表面积变化的规律，拓展学生的思维，体会分类讨论思想。

2. 评价任务

依据学习目标，确定“正方体的表面积变化”的评价任务有四个：

- (1) 创设问题情境，激发探究兴趣
- (2) 小组合作探究，归纳变化规律
- (3) 解决实际问题，体会数学思想
- (4) 拓展学生思维，促进理解规律

上面四个评价任务与三个学习目标有着紧密的关联性，且评价任务也为挑战性问题设计提供了依据。



二、学习探究过程

依据学习目标，落实评价任务，开展以学生主动探究挑战性问题、教师引导为辅的学习过程，让学生在探究立方体的表面积变化规律中发展概括归纳能力，积累数学活动经验，提升思维能力。

任务一：创设问题情境，激发探究兴趣

问题情境：母亲节快要到了，小巧到商店里去准备节日礼物送给妈妈。经过精挑细选，她选中了8个大小相同，正方体形状的不同口味的巧克力小礼盒，想一想把8个巧克力小礼盒包装在一起，如何包装才能使包装纸最省呢？

问题：要使包装纸最省，就是研究数学里的什么问题？

揭示课题：今天我们共同学习把几个相同的正方体拼成一个长方体（正方体）后，它的表面积有什么变化？以及变化后的特点和规律。

设计意图：数学源于生活，数学是对生活现象的提炼和加工，以贴近学生生活的问题引入，把实际问题抽象成数学问题，揭示核心问题“包装纸最省，就是求长方体的表面积最小”，从而引出后续的操作活动。

任务二：小组合作探究，归纳变化规律

动手操作 (1) 请学生动手把2个棱长1厘米的正方体模块拼成一个长方体，拼成后的长方体表面积是多少？你是如何计算的？

生1：拼成后的长方体的长为2厘米、宽和高都是1厘米，可以算出长方体的表面积是10平方厘米。

生2：我发现用两个立方体的表面积的和减去2个面的表面积得到拼成后的长方体表面积为10平方厘米。

设计意图：按照学生的认知经验和水平，探索规律从简单的情况出发，把2个正方体拼成一个长方体，学生自然想到用表面积公式计算，通过引导学生用多种方法计算，发现2个正方体拼成一个长方体就是减少了两个面，为同学发现拼接的规律提供支架。

(2) 小组合作摆一摆、算一算，把3个、4个正方体分别拼成一个长方体，表面积又发生怎样的变化呢？5个呢？

设计意图：学生动手操作把3个、4个、5个相同的正方体拼成一个长方体，观察拼成的模型，容易发现分别有2个、3个、4个拼接缝，每个拼接缝减少2个面，就可以得到拼接后长方体的表面积计算方法。另外有同学在拼接4个正方体的时候，发现了还有一种拼法，有4个拼接缝，但计算拼接后的长方体表面积思路是一样的，促进学生真正理解表面积变化的规律。

(3) 思考：拼成的长方体的表面积与原来几个正方体的面积和有什么关系？

学生归纳：拼接处的面积 = 原来正方体一个面的面积 $\times 2$

拼成的长方体表面积 = 原来正方体的表面积之和 - 拼接处的总面积；

设计意图：学生从几个个例出发，充分经历“发现——验证——归纳”的自主探究过程，并尝试用数学语言描述出规律，促进学生对规律的理解，培养了学生用数学语言表达现实世界的能力，也为以后用符号语言表示规律打下基础。

任务三：解决实际问题，体会数学思想

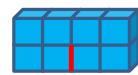
(1) 思考：把8个边长为1cm的正方体拼成一个长方体，如何拼才能使拼成的长方体表面积最小？为什么？

学生反馈：

一字型：8个正方体一字拼，有7个接缝，一个接缝减少2个面，共减少 $7 \times 2 = 14$ 个面，每个面 $1 \times 1 = 1$ 平方厘米，减少了 $14 \times 1 = 14$ 平方厘米，拼出的面积 = $48 - 14 = 34$ 平方厘米。



上下两层：有10个接缝，一个接缝减少2个面，共减少 $10 \times 2 = 20$ 个面，每个面 $1 \times 1 = 1$ 平方厘米，减少了 $20 \times 1 = 20$ 平方厘米，拼出的面积 = $48 - 20 = 28$ 平方厘米。



大正方体：有12个接缝，一个接缝减少2个面，共减少 $12 \times 2 = 24$ 个面，每个面 $1 \times 1 = 1$ 平方厘米，减少了 $24 \times 1 = 24$ 平方厘米，拼出的面积 = $48 - 24 = 24$ 平方厘米。



(2) 解决问题：小巧送妈妈的8盒巧克力如何包装，所需的包装纸最省呢？

设计意图：学生从4个相同立方体有两种不同拼法得到启发，

更有兴趣主动探索8个相同立方体不同拼法,不同拼法得到的长方体不一样,但表面积的计算思路却是一样的,都是运用得到规律解决问题,关键是准确找到有多少个拼接缝,通过计算、比较、归纳,探索多个相同立方体叠放的方法及使其表面积最小的策略,体会运用数学知识解决问题的成功喜悦,激发学生学习数学的兴趣。

任务四:拓展学生思维,促进理解规律

拓展:在一个边长为3厘米的正方体上切掉一个边长为1厘米的小正方体,它的表面积如何变化?

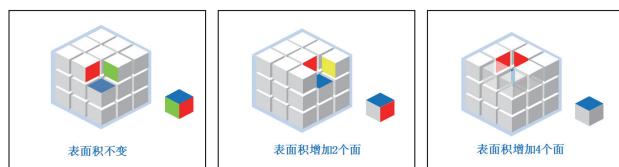
学生组内讨论交流分享如何切?切后表面积的是如何变化的?

切法:棱上切、顶点上切、面上切

变化情况 点上切:表面积不变

棱上切:表面积增加两个侧面

面上切:表面积增加四个侧面



设计意图:学生根据前面的探索掌握了多个相同正方体拼接后表面积的计算方法,每拼接一次就减少2个面,关键是拼接了多少次。通过这个拓展问题激发学生思考,在一个大正方体中切一个小正方体,表面积又如何变化呢,在逆向思考中,促进学生对规律的理解,培养学生的发散性思维,渗透分类讨论思想。

三、以挑战性问题培育学生探究规律的数学意识

数学规律反映的是有关数学对象之间内在的、本质的联系,对数学规律的探索就是让学生经历观察、比较、归纳、验证的过程,逐步发现并确定数学中的规律性和不变性。学生通过解决有挑战性的问题,去发现规律、总结规律、运用规律,培育探索规律的数学意识,从而促进学生的思维发展^[3]。

1. 创设问题情境,激发学生的主动探究意识

学生主动探究意识的培育是提升学生核心素养的关键。数学规律教学可以通过创设问题情境来激发学生的主动探究意识,主要形式包括:一是与学生相关的真实生活情境;二是动手操作的数学实验活动;三是利用多媒体创设问题情境。本节课中通过学生熟悉的包装母亲节礼物这个真实生活情境,提出“如何包装才能使包装纸最省呢?”具有挑战性的问题,激发了学生主动参与学习的兴趣,产生了探究问题的欲望;通过创设的动手操作的一系列活动,调动学生手眼等多种感官系统参与学习活动,主动参与到知识的建构中,发现多个小正方体可以有不同的拼搭方法,借助实物学具动手拼搭的过程,使学生思维可视化,也渗透了数形结合的数学思想。

2. 注重合作探究,提升学生的猜想归纳意识

数学猜想是以已有数学知识和数学事实为依据,运用分析、综合、演绎尤其是类比、归纳等科学发现的思维方法,对未知量及其规律做出的判断。提升学生的数学猜想归纳意识,教师通过设计合作探究活动,有意识地引导学生参与到问题的猜想活动

中,让学生在活动中体会猜想的方法,发展猜想能力。在小组合作探究环节设计了三个由浅入深、层层递进的动手操作活动,引导学生积极地投入到数学探究活动中去,教给学生猜想的方法如:实验、归纳、推广等方法,学生在自主进行观察、计算、比较、发现等操作活动,通过获得的数学信息、得到的数据或现象进行独立思考,从而作出合理的猜想,归纳出隐藏在数学现象中的规律,通过交流分享,准确表达出来,如:“拼成的长方体表面积=原来正方体的表面积之和-拼接处的总面积”,提升学生的猜想归纳意识,实现思维的自然生长。

3. 经历规律建构,培育学生的验证应用意识

验证和应用意识是重要的数学思维方法,只有对提出的数学猜想加以验证,通过解决实际问题才能上升为数学理论。学生在验证规律、应用规律解决问题的过程中,就是不断学习材料进行研究、实验、实践,并尝试变换角度、形式,重新完善、修正甚至否定,在这种操作、实践、思辨的过程中进行验证,在自我肯定或否定中逐步找到数学规律的实质,最终归纳出合理的结论。

在拓展练习部分,通过在一个正方体不同部位切掉一块的活动探究,就是学生运用规律解决问题的过程,学生发现,表面积的变化不仅是减少,也有可能是增加或者不变。在正方体的顶点切掉一块,表面积是不变的,在正方体的棱中间切掉一块,表面积增加了左右两个面,在正方体的面上切掉一块,表面积增加四个面。这种在不断的探究中发现问题,质疑结论,提升了学生的思维。通过在一个正方体不同部位切掉一块的活动探究,学生发现,表面积的变化不仅是减少,也有可能是增加或者不变。这样的设计不断拓展学生的思维深度,培育了学生的应用意识,促使学生发展深层次的智慧情感与品格。

4. 及时回顾整理,提高学生的自主反思意识

数学规律教学的主要目的是让学生掌握研究数学的方法,促使学生数学思维能力得到提高。由于数学规律教学本身比较抽象,即使学生对问题情境有兴趣,依然较难从学习过程中抽取研究内核,从而内化成自己的学习方法,需要引导学生学会对探索规律的过程进行回顾整理,及时反思总结活动经验,并把探索数学规律的方法、经验迁移到其他问题的解决过程中。学生通过解决问题情境中提出的包装纸最省的问题、课堂练习和拓展问题就是引导学生有效帮助学生总结已学的知识,促进他们对探究过程的提炼和升华,提高学生自主反思的意识。

通过设计挑战性问题引导学生参与发现规律、探索规律的数学活动,唤醒了学生数学学习的原动力,促使学生产生运用规律并尝试自己创造规律的饱满热情,发展学生的抽象概况、归纳等能力,感悟数学思想方法,积累数学活动经验。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部,《义务教育数学课程标准(2022版)》,北京:北京师范大学出版社,2022.
- [2] 韩琴、胡卫平. 小学生创造性数学问题提出能力的发展研究, 心理学探新, 2007 (04): 59-63.
- [3] 王宏进.“让学”以“致用”——以“表面积的变化为例”,《教育观察》第3卷第15期, 2014年5月.