

# “直线与平面的相关位置”教学设计

朱建波

内蒙古师范大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010022

**摘要：** 直线与平面相关位置隶属于解析几何，是大学数学教学的重要内容。本文通过数形结合的方式，概括出直线与平面的相关位置及其判定定理，进而得到直线与平面所得角的公式。在整个教学设计中，通过师生之间相互交流、合作、评价等方式，增加学生学习解析几何的兴趣，提高他们的空间想象力和逻辑推理能力。

**关键词：** 平面；直线；位置关系；判定定理

## Teaching Design for the Relevant Positions of Straight Lines and Planes

Zhu Jianbo

Inner Mongolia Normal University, College of Mathematics Science, Hohhot, Inner Mongolia 010022

**Abstract：** The relevant positions of straight lines and planes belong to analytic geometry and are important part of university mathematics teaching. By using the idea of combination of number and form, this article summarizes the relevant position and judgment theorem between lines and planes, and then, the formula for the angle between a straight line and a plane is obtained. In the entire teaching design, through mutual communication, cooperation, evaluation between teachers and students, and so on, students' interest in learning analytic geometry is increased, and their spatial imagination and logical reasoning ability are improved.

**Keywords：** plane; straight line; positional relationship; judgment theorem

### 一、教学内容分析

本节内容选自吕林根和许子道编著的《解析几何（第五版）》第三章第五节<sup>[1]</sup>，它是整个第三章的学习重点，也是核心内容。本节课的学习不仅是点与平面、平面与平面相关位置知识的延续，同时又是点与平面、直线与直线相关位置学习的基础。因此，掌握这部分内容是非常重要的。

### 二、学情分析

解析几何的授课对象为数学专业大一的学生，学生在中学时期已经对点、线、面的位置关系有了初步了解。学生学习基础差异较大，大部分学生没有课前预习的习惯，课后做作业也只是为了完成任务。

### 三、学习目标

1. 知识目标：理解直线与平面的相关位置及其判定；掌握直线与平面所成角的求法。
2. 能力目标：通过数形结合的方式，与学生一起总结出直线与平面的相关位置和判定定理，同时，让学生参与推导直线与平面所成角的公式，以此提高学生的空间想象力和逻辑推理能力。
3. 育人目标：激发学生对解析几何的学习兴趣，培养严谨的数学思维和解决问题的能力，增强学生的自信心与成就感。

### 四、教学重点

直线与平面的相关位置及其判定定理；直线与平面所成角的求法。

### 五、教学难点

直线与平面相关位置判定定理的应用；直线与平面所成角公式的运用。

### 六、教学过程

#### （一）复习旧知、引入新课

提问1 通过图1复习上节课点、线、面之间的相关位置，并引入本节课将要学习的内容。

设计意图：通过图1让学生容易想起点与平面、平面与平面相关位置关系，进一步引出本节内容，并说明所学内容具有承上启下的作用。



> 图1

项目/基金信息：内蒙古自治区一流学科科研专项项目（YLXKZX-NSD-001, YLXKZX-NSD-020）资助。

作者简介：朱建波，男，讲师，博士，研究方向：泛函微分方程理论及应用。

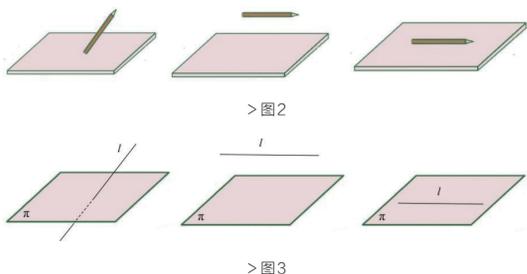
### (二) 相关位置探究过程

提问1 根据日常观察,是否遇到过直线与平面相关位置的具体例子?

提问2 将一支铅笔斜着放置在桌面上,然后水平放置在空中,再平放到桌面上。在此过程中,这支铅笔与桌面分别有几个公共点(见图2)?

提问3 将铅笔抽象为直线 $l$ ,将桌面抽象为平面 $\pi$ ,那么能否归纳出直线 $l$ 与平面 $\pi$ 的相关位置(见图3)?

设计意图:通过提问1,首先让学生通过联想的方式,熟悉本节课的内容。之后,通过提问2,学生通过实际操作并结合图2,可以很快地得到铅笔与桌面的情况。通过图3学生容易归纳出直线 $l$ 与平面 $\pi$ 的三种位置关系,即相交、平行和直线在平面上。通过以上实际操作,不仅增强学生的空间想象力,还可以领悟空间图形性质。



### (三) 判定定理探究过程

提问4 如何通过直线 $l: \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$ 与平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的方程得到它们相关位置的判定定理?

设计意图:通过直线 $l$ 和平面 $\pi$ 的方程,让学生通过计算得到方程的解与交点之间的关系,并总结出它们的判定定理:

定理1 直线 $l$ 和平面 $\pi$ 的相互位置关系有以下充要条件:

- 1) 相交:  $AX + BY + CZ \neq 0$ ;
  - 2) 平行  $AX + BY + CZ = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ ;
  - 3) 直线在平面上  $AX + BY + CZ = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ .
- 通过以上方式可以提高学生的计算以及逻辑推理能力。

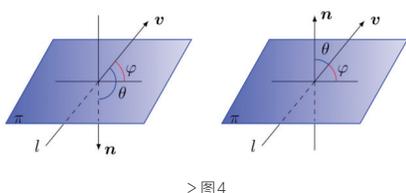
### (四) 直线与平面所成角探究过程

提问4: 当直线 $l$ 与平面 $\pi$ 相交时,在直角坐标系下它们的交角怎样求?

设计意图:这样提问可以使学生回忆起直线 $l$ 与平面 $\pi$ 间的角 $\varphi$ 的定义。通过图4,可以让学生知道 $l$ 与 $\pi$ 间的角 $\varphi$ 可以由方向向量 $v$ 和法向量 $n$ 所决定,并得出 $l$ 与 $\pi$ 间的角 $\varphi$ 的公式:

$$\sin \varphi = |\cos \theta| = \frac{|n \cdot v|}{|n||v|} = \frac{|AX + BY + CZ|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

其中 $\theta(0 \leq \theta \leq \pi)$ 表示 $n$ 和 $v$ 的夹角。在推导角的公式过程中可以完全由学生主导,教师仅协助即可。这样可以培养学生的独立思考能力和逻辑思维能力。



## 七、例题

例试验证直线 $l: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$ 与平面 $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$ 相交,并求出它们的交点和交角。

解: 直线 $l$ 的方向向量 $v = (-1, 1, 2)$ ,平面 $\pi$ 的法向量 $n = (2, 1, -1)$ 。因为 $2 \times (-1) + 1 \times 1 + (-1) \times 2 = -3 \neq 0$ ,通过定理1得出 $l$ 与 $\pi$ 相交。

设 $l$ 的参数方程为 
$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = 1+2t \end{cases}$$
,并将其代入到平面 $\pi$ 中,得

$$-2t + (1+t) - (1+2t) - 3 = 0,$$

解得 $t = -1$ ,因此交点坐标为 $(1, 0, -1)$ 。

设 $l$ 与 $\pi$ 的交角为 $\varphi$ ,则

$$\sin \varphi = \frac{|2 \times (-1) + 1 \times 1 + (-1) \times 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{2},$$

所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 。

## 八、小结

对直线与平面的相关位置进行系统性总结,并学会应用定理1判断直线与平面的位置关系;强调平面所成角公式的应用。

## 九、布置作业及课外推荐资源

(一) 布置与本节内容相关的课后习题,并鼓励学生寻找实际生活中的例子,加深对直线与平面相关位置的理解。

(二) 推荐与本课程有关的书籍,见[2-5]。有关的期刊论文,见[6-15]。

### 参考文献

- [1] 吕林根, 许子道. 解析几何(第五版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [2] 曹丽梅, 司新辉, 李晔. 解析几何[M]. 北京: 机械工业出版社, 2023.
- [3] 生云鹤, 李方, 侯秉喆. 空间解析几何[M]. 北京: 科学出版社, 2022.
- [4] 郑宝东, 郭潇, 王忠英. 线性代数与空间解析几何(第五版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [5] 马慧龙. 解析几何[M]. 吉林: 吉林教育出版社, 2020.
- [6] 冯兴旺. 巧环节设置, 妙问题引导——以“直线与平面垂直”教学为例[J]. 新课程, 2024, (16): 33-36.
- [7] 徐勇. 基于教材重构 实现能动学习——以“直线与平面平行性质定理”教学为例[J]. 数学通讯, 2024, (22): 25-28.
- [8] 魏庭路. 基于信息加工理论的立体几何教学设计与思考——以“空间直线、平面的平行”为例[J]. 数学通讯, 2023, (12): 15-18.
- [9] 谢晓霞, 曾泽群. 构建结构化知识 助力新知探究与互动生成——基于素养培育的空间点、直线、平面之间的位置关系教学设计[J]. 数学教学, 2023, (03): 14-17.
- [10] 杨龙. 环环相扣: 追求自然的数学课堂——以“直线与平面平行的判定”为例[J]. 数学通讯, 2023, (21): 8-10+60.
- [11] 张海东. 以皓设计“直线与平面垂直的判定”的积件及教学应用[J]. 数学之友, 2023, (06): 80-81.
- [12] 钟志华, 顾纤纤, 崔蓝天. 基于合情推理的教学设计——以“直线与平面平行的判定”为例[J]. 数学教学, 2023, (10): 11-16.
- [13] 刘煌. 让核心素养在教学活动中落地生根——以“直线与平面平行的判定”核心片段设计为例[J]. 数理化解题研究, 2022, (27): 41-43.
- [14] 陈静安, 孟胜奇, 杨彩如. 核心素养视域下的“直线与平面垂直的判定”教学案例分析[J]. 中国数学教育, 2021, (22): 9-15.
- [15] 庞怡婷. 基于核心素养的“直线与平面垂直的判定”教学设计[J]. 新教育, 2020, (10): 39-42.