

在大学物理框架内定量说明电场与磁场的转化

袁子刚, 邵晓红, 冯志芳

北京化工大学数理学院, 北京 100029

摘 要 : 电场与磁场是同一种物质在不同参考系中的不同表现形式, 而学生对此往往容易误解。本文以并排运动电荷的模型为例, 利用大学物理课程中的定理、定律和公式, 首先说明电场与磁场在参考系变换时是可以互相转化的, 进而通过两种简单方法定量说明电场力与磁场力转化的具体形式, 从而帮助学生理解电场与磁场的统一性、同时加深对相对性原理和洛伦兹变换的理解。

关 键 词 : 电磁场; 相对论; 洛伦兹变换

Quantitatively Explain the Transformation of Electric Field and Magnetic Field within the Framework of College Physics

Yuan Zigang, Shao Xiaohong, Feng Zhifang

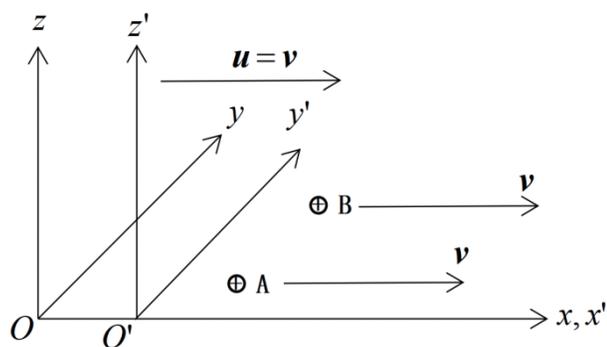
Collage of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029

Abstract : Electric field and magnetic field are different forms of expression of the same thing in different reference systems, which are often misunderstood by students. Taking the model of side-by-side moving charges as an example, using the laws and formulas appearing in college physics textbooks, this paper explains that electric field and magnetic field can be transformed into each other when the reference systems are transformed, and then quantitatively explains the specific forms of transformation of electric field force and magnetic field force through two simple methods. Thus the students can understand the unity of the electric field and the magnetic field, and deepen their understanding of the principle of relativity and Lorentz transformation.

Keywords : electromagnetic field; relativity; Lorentz transformation

引言

狭义相对论及洛伦兹变换作为内涵深刻而又形式简单的理论, 直到今天仍然被广泛讨论^[1-4]。而在大学物理课程中, 对电磁场的洛伦兹变换往往不做介绍, 使得很多同学对电磁场存在误解, 不能理解电场与磁场其实是同一种物质的不同表现形式。如对图1中两个同向并排运动电荷之间相互作用力的问题, 很多同学就疑惑不解。该模型包含两个相距为 r 的等量正电荷A与B, A、B连线与 y 轴平行, 两电荷相对 S 参考系($oxyz$)以相同的速度 v 沿 x 轴正方向运动。另有一参考系 S' ($o'x'y'z'$), 其坐标轴与 S 系的坐标轴平行, 并随电荷一起运动, 即 S' 系相对于 S 系的速度 $u=v$ 。可见, 在 S' 系中, 两个电荷静止, 其间存在库仑斥力。而在 S 系中, 两个电荷并排运动。



> 图1 并排运动电荷的模型

对于这个模型中两个电荷之间的相互作用力, 有的学生认为是斥力, 因为在 S' 系两个电荷相对静止, 有库仑斥力, 而在 S 系中, 仅仅是变换了参考系, 斥力不可能变为引力。另有学生认为, 运动电荷产生磁场, 从而会对另一运动电荷产生吸引的磁场力。或者说两个并排运动的电荷, 可以等效为两条平行的电流, 而同向流动的电流间存在吸引的磁场力。那么, 两个电荷之间的相互作用力到底是斥力还是引力呢? 部分老师在遇到这种问题时也会束手无策。

由于大学物理课程会讲相对运动, 学生懂得通过参考系变换来分析两电荷的受力问题。但由于学生缺乏关于电磁场洛伦兹变换的知识, 在面对这种问题时很容易误入歧途。本文将以此模型为例, 利用大学物理教材中出现的定理、定律和公式, 用较为简单的方式定量说明电磁力的洛伦兹变换, 从而帮助学生正确理解电场与磁场的统一性。

一、电场与磁场变换的简单说明

在上述模型中,从 S' 系来看,两电荷静止,彼此之间有相互排斥的电场力,大小为 $F_e' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$, 其中 ϵ_0 为真空电容率, q 为两电荷带电量, r 为两电荷之间的距离。而从 S 系来看,两电荷并排运动,速率为 v , 其间存在相互吸引的磁场力。点电荷运动时产生的磁感应强度大小为^[6] $B = \frac{\mu_0 qv}{4\pi r^2}$, 从而两个电荷之间磁场力的大小为

$$F_m = qvB = \frac{\mu_0 q^2 v^2}{4\pi r^2} \quad (1)$$

其中 μ_0 为真空磁导率。这个磁场力与 S' 系中电荷之间的电场力 F_e' 之比为

$$\frac{F_m}{F_e'} = \mu_0 \epsilon_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2} \quad (2)$$

由此可见,低速条件下 ($v \ll c$), 虽然在 S 系看来, 并排运动的电荷之间确实存在相互吸引的磁场力, 但该磁场力远小于等量静止电荷之间的电场力。而且, 两个参考系中观察到的现象应当是统一的。 S' 系中排斥的电场力使得电荷之间的距离逐渐增加。变换到 S 系中, 电荷之间的力也应当使得电荷之间的距离逐渐增加, 即总的电磁力(电场力+磁场力)仍然是斥力。这说明, 运动电荷之间仍然存在排斥的电场力, 且大小应与原来静止电荷之间的电场力基本相当。当两参考系之间的相对速度 $u=v$ 从零开始连续变化时, S 系中的总的电磁力也应当在静止电荷电场力的基础上连续的变化。

因此, 对于并排运动电荷之间相互作用力的问题, 答案是确定的, 即两个电荷之间的电磁力仍然是斥力。仅在等量静止电荷库仑斥力的基础上做一微小修正(低速条件下)。

这样, 通过并排运动电荷的模型, 我们用大学物理课程内的定律和公式对参考系变换时电磁力的变换做了定量说明。电场力与磁场力的变换是电场强度 E 和磁感应强度 B 变换的体现。上述模型中的现象说明, 电场与磁场在参考系变换时是会互相转化的, 即电场与磁场实际是同一种物质在不同参考系中的不同表现形式^[6]。上述说明还没有给出该物理模型的完整的严格解, 下面我们进一步分析该模型。

二、电场与磁场变换的严格解

电磁场中, 电荷所受的电磁力称为洛伦兹力, 满足

$$F = \frac{dp}{dt} = q(E + v \times B) \quad (3)$$

其中 p 为相对论动量。下面我们按此形式(3)来考虑参考系变换时的电磁力。

仍然设 S' 系相对于 S 系沿 x 轴正方向运动, 速度为 u 。在参考系变换时, 电场强度与磁感应强度的变换式及其逆变换式为^[7]

$$\begin{cases} E_x' = E_x \\ E_y' = \gamma(E_y - uB_z) \\ E_z' = \gamma(E_z + uB_y) \\ B_x' = B_x \\ B_y' = \gamma\left(B_y + \frac{uE_z}{c^2}\right) \\ B_z' = \gamma\left(B_z - \frac{uE_y}{c^2}\right) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} E_x = E_x' \\ E_y = \gamma(E_y' + uB_z') \\ E_z = \gamma(E_z' - uB_y') \\ B_x = B_x' \\ B_y = \gamma\left(B_y' - \frac{uE_z'}{c^2}\right) \\ B_z = \gamma\left(B_z' + \frac{uE_y'}{c^2}\right) \end{cases} \quad (5)$$

我们先来说明如何用上述变换式(4-5)导出并排运动电荷之间电磁力的严格解, 再来说明如何在大学物理框架内导出上述结果。

按照并排运动电荷的模型, S 系中有两个并排运动的电荷, 速度为 $u=v$ 。对于离 x 轴较远的电荷 B, 在 S' 系只受电场力作用。电场力方向沿 y 轴正方向, 大小为 $F' = qE_y'$ 。由(4-5)式可知, 在 S 系, 电荷 B 只受 y 方向的电磁力, 大小为

$$\begin{aligned} F_y &= qE_y - qvB_z \\ &= q\gamma E_y' - qv\gamma \frac{uE_y'}{c^2} \\ &= q\gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) E_y' \\ &= \frac{q}{\gamma} E_y' = \frac{F'}{\gamma} \approx \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) F' \end{aligned} \quad (6)$$

由此可见, 低速情况下并排运动电荷之间的电磁力略小于这两个电荷静止时的电场力。如果把式(6)和式(1)比较则还可以发现, 虽然 S 系中磁场力是相互吸引的, 但 S 系中电场力相比于 S' 系中的电场力会略微增加, 从而抵消一部分减小的力。

接下来说明如何在大学物理框架内导出上述结果, 即变换式(6)。这里的电磁力等于相对论动量的导数。由相对论动量和能量的定义式

$$p = mvs, E = mc^2 \quad (7)$$

以及速度变换式

$$\begin{aligned} v_x' &= \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \\ v_y' &= \frac{v_y \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} \\ v_z' &= \frac{v_z \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} \end{aligned} \quad (8)$$

可以导出

$$\begin{aligned} p_x' &= \frac{m_0 v_x'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} \\ &= \frac{m_0 v_x' (1 - uv_x/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ &= \frac{m(v_x - u)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ &= \gamma(p_x - uE/c^2) \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 为相对论质量。同样也可以导出

$$\begin{aligned} p_y' &= p_y \\ p_z' &= p_z \\ E' &= \gamma(E - up_x) \end{aligned} \quad (10)$$

可见动量与能量之间的变换关系与空间和时间之间的变换关系完全类似。进一步，可由上式结合式(3)导出力的变换关系^[8]，包括

$$F_y = \frac{F_y'}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} v_x'\right)} \quad (11)$$

对于我们所讨论的模型， $v_x' = 0$ ，因此

$$F_y = \frac{F_y'}{\gamma} \quad (12)$$

这样我们就导出了式(6)中的结果。

对于我们所讨论的模型，也可以通过如下更简单的方法得到上述结果^[9-10]。在 S 系和 S' 系中， y 方向上的空间间隔一致，速度的差别来源于时间间隔的差别。因此由时间的变换式可直接得出速度的变换式，即

$$v_y = \frac{v_y'}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} v_x'\right)} \quad (13)$$

考虑到电荷在 S' 系中的速率 $v_x' = 0$ ，按照速度变换式

(13)，速率 $v_y = \frac{v_y'}{\gamma}$ 。而 S 系中电荷质量 $m = \gamma m_0$ ，因此动量 $p_y = mv_y = m_0 v_y' = p_y'$ 。再考虑到力等于动量的微分除以时间的微分^[11-13]，从而这里由时间的变换式也可直接得出力的变换式，即式(9)。

值得一提的是，如果考虑到两个电荷在沿 y 方向电磁力的作用下开始运动^[14-15]，即 $v_y' \neq 0$ ，则此时用第一种方法，仍然可以得出式(12)。

三、结语

通过上述讨论我们可以用较为简单的方式向学生说明，虽然在不同的参考系里，电荷之间可能只存在电场力或者既存在电场力也存在磁场力，但总的电磁力是符合狭义相对论中不同参考系的变换关系的。这说明电场与磁场并不是截然不同的两种物质，而是同一种物质在不同参考系中的不同表现形式，当参考系变换时，电场与磁场也会互相转化，即不同参考系中电场与磁场的比例不同。更深层次上，这是由于电磁理论是符合洛伦兹协变性的，不同参考系中，规律的本质并没有变化，只是用电场和磁场这种方式表示时，形式上有所不同。

参考文献

- [1] 余勇. 再论光速不变原理和洛伦兹变换 [J]. 大学物理, 2022, 41(6): 37-39.
- [2] 周凯. 也谈洛伦兹力公式中速度的参考系选择问题 [J]. 物理教师, 2021, 42(6): 85-88.
- [3] Hao Chen, Wei E. I. Sha, Xi Dai, and Yue Yu. On The Low Speed Limits of Lorentz' s Transformation - How relativistic effects retain or vanish in electromagnetism [J], Progress In Electromagnetics Research, Vol. 174, 1-22, 2022
- [4] Satadal Datta. A Revisit to Lorentz Transformation without Light. arXiv: 2212.03706.
- [5] 马文蔚, 周雨青, 解希顺改编. 物理学 [M]. 7版. 北京: 高等教育出版社, 2020
- [6] 曾志华, 黄碧华. 用相对性原理解释电场和磁场 [J]. 物理与工程, 2018, 28(2): 40-44.
- [7] P.R.费曼, R.B.莱顿, M.桑兹. 费恩曼物理学讲义(新千年版) [M]. 李洪芳, 王子辅, 钟万蘅译. 上海: 上海世纪出版股份有限公司, 上海科学技术出版社, 2013.
- [8] 张三慧. 大学物理学 [M]. 3版 B版. 北京: 清华大学出版社, 2009.
- [9] 姚文俊, 程衍富, 戴同庆, 等. “电磁场与电磁波”和“大学物理”教学类比研究 [J]. 中国电力教育: 中, 2012.
- [10] 朱宁宁. 物理学学科能力在电场与磁场上的表现对比分析 [J]. 新课程教学: 电子版, 2014(3): 3.
- [11] 林琳, 包秀丽. 大学物理中静电场与稳恒磁场的对比研究 [J]. 中国科教创新导刊, 2013(10): 1. DOI: 10.3969/j.issn.1673-9795.2013.10.042.
- [12] 李椿, 夏学江. 大学物理: 电磁场 [M]. 高等教育出版社, 1997.
- [13] 潘长宁, 何军, 周昕. “电磁场与电磁波”与“大学物理·电磁学”教学衔接问题的探讨 [J]. 教育教学论坛, 2015(3): 2. DOI: 10.3969/j.issn.1674-9324.2015.03.076.
- [14] 李亚丹. 基于物理模型驱动深度网络的电磁场逆散射成像 [D]. 南昌大学, 2020.
- [15] 单亚拿. 大学物理电磁学教学改革的研究与实践 [J]. 物理与工程, 2014, (S1): 48-50+54.