

# 误差修正模型的贝叶斯计算及应用

吴思, 郑晓盈

华南农业大学数学与信息学院, 广东 广州 510000

**摘要:** 本文利用贝叶斯理论的马尔科夫链蒙特卡罗 (MCMC) 算法对误差修正模型进行建模分析。在给定参数先验分布的条件下, 基于贝叶斯理论的共轭先验推导出误差修正模型的参数后验分布, 且发现其均为标准分布。通过模拟实验, 本文利用 Gibbs 抽样完成参数估计, 从误差、平均绝对误差、均方根误差三个角度对参数估计精度进行分析。针对误差修正模型, 结果表明 Gibbs 抽样效果较为理想。

**关键词:** 误差修正模型; 贝叶斯估计; MCMC 算法; Gibbs 抽样

## Bayesian Calculation and Application of Error Correction Model

Wu Si, Zheng Xiaoying

College of Mathematics and Information, South China Agricultural University, Guangzhou, Guangdong 510000

**Abstract:** This paper employs the Markov Chain Monte Carlo (MCMC) algorithm based on Bayesian theory to model and analyze the error correction model. Under the condition of given prior distributions of parameters, the posterior distributions of the parameters of the error correction model are derived based on the conjugate priors of Bayesian theory, and it is found that they are all standard distributions. Through simulation experiments, this paper utilizes Gibbs sampling to complete parameter estimation, and analyzes the accuracy of parameter estimation from three perspectives: error, mean absolute error and root mean square error. For the error correction model, the results indicate that Gibbs sampling performs relatively well.

**Keywords:** error correction model; Bayesian Estimation; MCMC Algorithm; Gibbs sampling

### 引言

对于常见的非平稳序列, 采用经典回归模型进行拟合会产生很多问题。为消除非平稳的影响, 人们通常采用差分的方式处理数据, 然而这种方法也会存在过拟合的问题, 此时可考虑采用误差修正模型来拟合模型。李小鸭和邵艺萱<sup>[1]</sup>使用误差修正模型对我国居民消费支出和实际的国内生产总值 (GDP) 之间的关系进行拟合, 建立国民消费支出对数的一阶差分 (因变量) 和实际 GDP 对数的一阶差分 (自变量) 之间的误差修正模型。张艳芳<sup>[2]</sup>运用协整与误差修正模型对 1985—2020 年中国技术贸易与经济增长的长期均衡与短期调整关系进行实证分析, 研究技术贸易收支对 GDP 增速的影响以及调整机制; 李光明<sup>[3]</sup>则通过协整与误差修正模型研究发现金融科技发展指标与新质生产力增长指标存在长期稳定的均衡关系, 为中国经济高质量发展提供建议。此外, 误差修正模型在工程科技中也有重要的应用, 刘畅和高铁梅<sup>[4]</sup>将误差修正模型运用到探究我国的电力需求影响因素之中, 先研究影响电力需求的因素, 并选取相关变量。该论文先建立电力需求的长期均衡模型, 在利用长期均衡方程的误差项进行检验, 进一步建立电力需求短期动态的误差修正模型。最终, 根据得到的长期均衡方程和短期动态方程, 从两个角度来分析和探求在我国电力行业中影响电力需求的影响因素并给出对应的建议和措施。汪兴瑞<sup>[5]</sup>利用误差修正模型研究我国原油期货以及原有现货价格的关系, 不同的是, 该论文还运用了 VAR 模型、脉冲响应和方差分解来探究两者的关系; 为进一步考察原油期货以及现货价格的联系, 该论文还构建了 VEC 向量误差修正模型。

不过以上研究均基于经典统计方法, 贝叶斯统计方法却鲜少利用。贝叶斯统计<sup>[6]</sup>是基于总体、样本和先验等因素, 利用贝叶斯定理, 结合总体分布及先验分布信息, 来得到后验分布的概率分布, 这个概率分布不仅会更接近样本, 同时也结合已有的先验信息, 详细可参考夏强等<sup>[7]</sup>。基于贝叶斯的这些优点, 本文尝试使用贝叶斯估计的方法对一阶误差修正模型的参数进行贝叶斯估计。

### 一、理论基础

贝叶斯学派观点认为任意参数  $\theta$  都可看作一个随机变量, 可用

一个概率分布去描述, 这个分布被称为先验分布。在得到样本信息之后, 利用贝叶斯公式将总体分布、样本信息和先验分布结合起来, 就可得到关于未知参数  $\theta$  的新的分布, 即后验分布。后验分

作者简介:

吴思 (1999.12-), 女, 汉族, 广东省湛江市人, 华南农业大学数学与信息学院数学专业硕士研究生在读, 研究方向: 概率论与数理统计;

郑晓盈 (1999.07-), 女, 汉族, 广东省深圳市人, 华南农业大学数学与信息学院统计学 2018 级本科生。

布公式如下:

$$p(\theta|y) = \frac{p(y, \theta)}{p(y)} = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)} = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{\int_{\theta} p(y|\theta)p(\theta)d\theta}, \quad (1)$$

其中,  $p(y, \theta)$  是样本和参数  $\theta$  的联合分布;  $p(\theta)$  是参数  $\theta$  的先验分布;  $p(\theta|y)$  表示参数  $\theta$  的后验分布。但在实际计算中,  $p(y)$  并不依赖于  $\theta$ , 因而, 它对计算  $\theta$  的后验分布的贡献相当于一个正则化因子。所以, 贝叶斯公式的密度函数形式常被改写为以下的等价形式:

$$p(\theta|y) \propto p(y|\theta)p(\theta) = L(\theta|y)p(\theta), \quad (2)$$

其中,  $\propto$  为成正比符号, 表示两边成正比关系。由公式 (2) 可以得到, 后验分布正比于先验概率分布与样本的似然函数相乘的结果。

通常在估计参数  $\theta_i$  的过程中, 只需要对  $p(\theta|y)$  的其他参数进行积分, 就可得到  $\theta_i$  的边缘后验密度函数  $p(\theta_i|y)$ 。但是, 在解决实际问题的情况中, 想要用积分求解  $p(\theta_i|y)$  并不容易实现, 而 MCMC 方法简化了求解边缘后验密度的过程。

## 二、理论推导

### (一) 误差修正模型介绍

假设两变量  $X$  与  $Y$  的存在长期均衡关系, 表达式为:

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + \mu_t. \quad (3)$$

实际经济活动中自变量  $X$  与因变量  $Y$  很少处在均衡点上, 因此, 在实际观察中, 得到的只是两者之间的非均衡的或短期的关系。假设因变量和自变量之间具有 (1, 1) 阶分布滞后形式, 误差修正模型显示出  $Y_t$  值, 不仅与  $X_t$  的变化有关, 还与  $X_{t-1}$  和  $Y_{t-1}$  的状态值有关。

一阶误差修正模型为:

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \beta_1 \Delta X_t - \lambda \cdot ecm_{t-1} + \mu_t, \quad (4)$$

其中,  $\lambda = 1 - \delta$ ,  $a_0 = \beta_0 / (1 - \delta)$ ,  $ecm_t$  表示非均衡误差项或说是长期均衡偏差项。一般的情况下,  $|\delta| < 1$ , 所以有  $0 < \lambda < 1$ 。 $\mu_t$  相互独立, 并且  $\mu_t \sim N(0, \sigma_\mu^2)$ 。

### (二) 误差修正模型的统计结构分析

设时间序列  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  和  $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ , 则  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ ,  $t = 2, 3, \dots, n$  和  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ ,  $t = 2, 3, \dots, n$ 。

可以得到一阶误差修正模型的条件似然函数如下:

$$L(\beta_0, \beta_1, \lambda, \sigma_\mu^2, X|Y) \propto \prod_{t=2}^n (\sigma_\mu^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\Delta Y_t - \beta_0 - \beta_1 \Delta X_t + \lambda \cdot ecm_{t-1})^2 / \sigma_\mu^2 \right\}. \quad (5)$$

令

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 1 & \Delta X_2 & -ecm_1 \\ 1 & \Delta X_3 & -ecm_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \Delta X_n & -ecm_{n-1} \end{bmatrix}_{(n-1) \times 3}, \quad \hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \lambda \end{bmatrix}_{3 \times 1},$$

$$\mathbf{Y}^* = (\Delta Y_2, \Delta Y_3, \dots, \Delta Y_n)^T, \quad \mathbf{i} = (\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n)^T,$$

则可以将一阶误差修正模型转化为以下形式:

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{X}^* \hat{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{\mu} \sim N(0, \sigma_\mu^2). \quad (6)$$

因此, 一阶误差修正模型的条件似然函数可以改写为:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma_\mu^2, \mathbf{X}^* | \mathbf{Y}^*) \propto \frac{1}{(\sigma_\mu^2)^{\frac{n-1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\mu^2} (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta}) \right\}. \quad (7)$$

### (三) 误差修正模型的贝叶斯推断

在误差修正模型中, 引入关于参数估计的贝叶斯推断相关理论。根据预先假设的先验分布, 来推导出后验分布十分重要。针对未知参数  $\beta_0, \beta_1, \lambda, \sigma_\mu^2$  的先验分布的预设, 参考夏强等<sup>[8]</sup>, 刘贞等<sup>[9]</sup>, 本文的各参数先验分布选取如下:

1、对于参数  $\hat{\mathbf{a}} = (\beta_0, \beta_1, \lambda)^T$ , 取  $\boldsymbol{\beta}$  服从多元正态分布, 即  $\boldsymbol{\beta} \sim N(\boldsymbol{\beta}^{(0)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(0)})$ ;

2、对于参数  $\sigma_\mu^2$ , 取  $\sigma_\mu^2$  服从逆伽马分布  $IG(a, b)$ , 且  $a > 0, b > 0$ 。

假设各个参数相互独立, 且  $\boldsymbol{\beta}^{(0)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(0)}, a, b$  为已知的超参数,  $\sigma_\mu^2$  密度函数为

$$f(\sigma_\mu^2 | a, b) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} (\sigma_\mu^2)^{-(a+1)} e^{-\frac{b}{\sigma_\mu^2}}, \sigma_\mu^2 > 0 \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

因此, 根据标准贝叶斯方法以及上文选取的先验分布, 由先验分布的结果可以得到联合先验分布  $p(\hat{\mathbf{a}}, \sigma_\mu^2)$ , 结合似然函数

$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma_\mu^2, \mathbf{X}^* | \mathbf{Y}^*)$ , 可以得到参数后验联合分布为

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\beta}, \sigma_\mu^2, \mathbf{X}^* | \mathbf{Y}^*) &\propto L(\boldsymbol{\beta}, \sigma_\mu^2, \mathbf{X}^* | \mathbf{Y}^*) \times p(\boldsymbol{\beta}, \sigma_\mu^2) \\ &\propto (\sigma_\mu^2)^{\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\mu^2} (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta}) \right\} \times (\sigma_\mu^2)^{-(a+1)} e^{-\frac{b}{\sigma_\mu^2}} \times \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{(0)})^T (\boldsymbol{\Sigma}^{(0)})^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{(0)}) \right\} \\ &\propto (\sigma_\mu^2)^{\frac{n-1}{2} - a - 1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sigma_\mu^2} ((\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta}) + 2b) + \right. \right. \\ &\left. \left. (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{(0)})^T (\boldsymbol{\Sigma}^{(0)})^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{(0)}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

由联合后验分布可以得到各参数  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \lambda)^T, \sigma_\mu^2$  的后验分布如下:

1、 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \lambda)^T$  的条件后验概率函数为

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\beta} | \sigma_\mu^2, X, Y) &\propto p(\boldsymbol{\beta}, \sigma_\mu^2, X | Y) \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sigma_\mu^2} (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{(0)})^T (\boldsymbol{\Sigma}^{(0)})^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{(0)}) \right] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^*)^T (\boldsymbol{\Sigma}^*)^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^*) \right\} \sim N(\boldsymbol{\beta}^*, \boldsymbol{\Sigma}^*). \end{aligned}$$

$$\text{其中, } \boldsymbol{\beta}^* = \left[ \frac{\mathbf{X}^{*T} \mathbf{X}^*}{\sigma_\mu^2} + (\boldsymbol{\Sigma}^{(0)})^{-1} \right]^{-1} \times \left[ \frac{\mathbf{X}^{*T} \mathbf{Y}^*}{\sigma_\mu^2} + (\boldsymbol{\Sigma}^{(0)})^{-1} \boldsymbol{\beta}^{(0)} \right], \quad \boldsymbol{\Sigma}^* =$$

$$\left[ \frac{\mathbf{X}^{*T} \mathbf{X}^*}{\sigma_\mu^2} + (\boldsymbol{\Sigma}^{(0)})^{-1} \right]^{-1}.$$

2、 $\sigma_\mu^2$  的条件后验概率函数为

$$\begin{aligned} p(\sigma_\mu^2 | \boldsymbol{\beta}, X, Y) &\propto p(\boldsymbol{\beta}, \sigma_\mu^2, \mathbf{X}^* | \mathbf{Y}^*) \\ &\propto (\sigma_\mu^2)^{\frac{n-1}{2} - a - 1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\mu^2} \left[ (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta}) + 2b \right] \right\} \\ &\sim IG \left( \frac{n-1}{2} + a, \frac{\mathbf{s}^{*2}}{2} + b \right), \end{aligned}$$

其中,  $s'^2 = (Y' - X'\beta)'(Y' - X'\beta)$ 。

(四) 误差修正模型的MCMC抽样

从后验分布的推理结果可得, 各参数的条件后验分布均是标准分布, 并且, 参数  $\beta$  为多维参数, 因此使用 Gibbs 抽样法进行抽样最佳<sup>[10]</sup>。

首先运用 Gibbs 抽样方法迭代  $N$  次得到各个参数的样本, 抽取的第  $i$  步如下:

- 1、从条件后验分布  $N(\beta', \Sigma')$  中对  $\beta$  进行抽样;
- 2、从条件后验分布  $IG\left(\frac{n-1}{2} + a, \frac{s'^2}{2} + b\right)$  中对  $\sigma_\mu^2$  进行抽样。

以上步骤是针对所有变量完成一次 MCMC 抽样, 抽样步骤的先后顺序不会对抽样的结果产生影响。为了保证模拟抽样的准确性, 我们共循环  $N$  次, 丢弃前  $M$  次抽样值。则假设经过第  $i$  次迭代后得到的参数记为  $\theta^{(i)} = (\beta_0^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \lambda^{(i)}, \sigma_\mu^{2(i)})$ 。然后, 去掉前  $M$  次的结果。由此可以获得利用 MCMC 抽样产生的误差修正模型中的参数集合, 表示为  $\{\theta^{(i)} = (\beta_0^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \lambda^{(i)}, \sigma_\mu^{2(i)}), i = M + 1, \dots, N\}$ 。

三、模拟实验

取随机抽取独立样本数为 200, 即  $n=200$ 。在模拟实验中设定  $M = 5000$ ,  $N = 10000$ , 即对样本数据循环 10000 次, 丢弃前 5000 次的值, 利用后面的 5000 次迭代值取平均, 并用来估计未知参数  $\beta_0, \beta_1, \lambda, \sigma_\mu^2$ 。由于产生数据具有随机性, 因此采取重复 100 次模拟实验, 每次产生 200 个样本数, 迭代 10000 次。重复 100 次后, 计算每一个参数的估计值的平均值, 来估计每个参数的真值; 并计算各参数的误差 Error (ERR)、平均绝对误差 Mean Absolute Error (MAE)、均方根误差 Root Mean Square Error (RMSE), 以此说明模拟实验拟合效果的优劣程度。结合 ERR 值、MAE 值、RMSE 值, 多方面评估模型拟合的效果, 其数值越小说明估计的精度越高, 拟合效果越好。

选择各超参数为  $\hat{a}^{(0)} = (0, 0, 0)$ ,  $\hat{\Sigma}^{(0)} = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1)$ ,  $a = 5/2$ ,  $b = 3/2$ 。使用 R 语言软件进行模拟实验应用, 考虑如下模型:

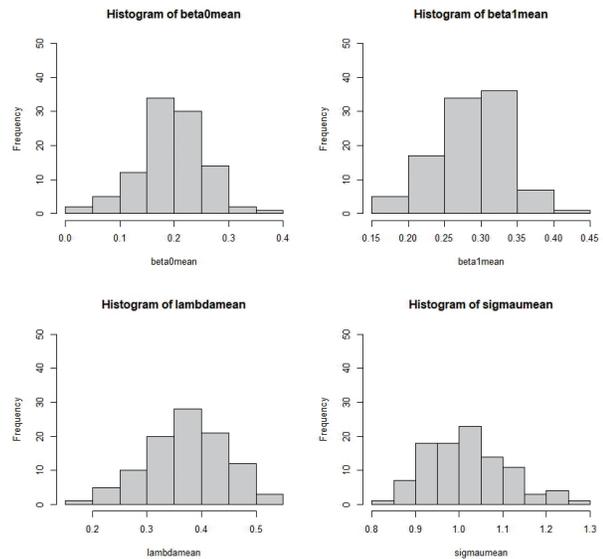
$$\Delta Y_t = 0.2 + 0.3\Delta X_t - 0.4 \times \text{ecm}_{t-1} + \mu_t, \quad \mu_t \sim N(0, 1)$$

将模拟实验应用的结果整理如下表 1。可以发现表 1 中的实验得到的后验均值结果与参数的真实值十分接近, 误差的绝对值均小于 0.03, 与真值的偏差较小, 说明利用贝叶斯方法估计参数的效果良好。MAE 是模拟值与真实值的误差的绝对值的平均数, 循环 100 次实验中, 各参数的 MAE 值均小于 0.1, RMSE 值均不超过 0.1, 说明拟合的精度较高。

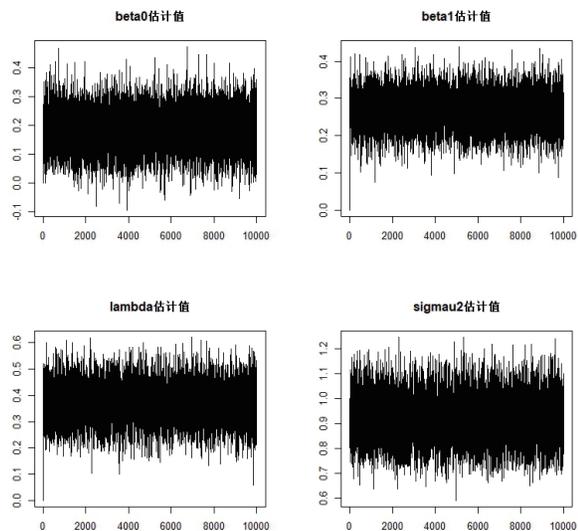
表 1 后验概率模拟实验结果

| 参数             | 真实值 | 模拟值    | ERR     | MAE    | RMSE   |
|----------------|-----|--------|---------|--------|--------|
| $\beta_0$      | 0.2 | 0.1930 | -0.0070 | 0.0483 | 0.0622 |
| $\beta_1$      | 0.3 | 0.2859 | -0.0141 | 0.0425 | 0.0523 |
| $\lambda$      | 0.4 | 0.3716 | -0.0284 | 0.0602 | 0.0768 |
| $\sigma_\mu^2$ | 1.0 | 1.0168 | 0.0168  | 0.0747 | 0.0929 |

根据再输出每次循环计算的各参数的平均值, 并绘制其相应的频率直方图, 见图 1。可以看出, 图形均成钟形态, 中间高, 两边低, 几乎是对称分布。模型中各参数抽样的轨迹图见图 2, 轨迹图展示了每次迭代的参数值的情况。仔细观察各个参数的轨迹图, 可以直观地发现参数的轨迹比较稳定, 估计结果比较理想, 且每个参数的轨迹都是围绕着设定的真实值上下摆动。综上所述, 可以说明个参数的估计结果已经处于收敛状态, 因此, 模拟实验的效果较好。



>图 1 参数  $\beta_0$ 、 $\beta_1$ 、 $\lambda$  和  $\sigma_\mu^2$  分布直方图



>图 2 最后一次各参数迭代轨迹图

为了进一步讨论参数对贝叶斯估计的敏感度, 本文采取控制变量的方法, 再次进行模拟实验应用的探究。考虑以下三种情形:

1. 当  $\beta_1 = 0.3$ ,  $\lambda = 0.4$  时,  $\beta_0$  分别为  $\beta_0 = 0.4$ 、 $\beta_0 = 0.6$ 、 $\beta_0 = 0.8$ ;
2. 当  $\beta_0 = 0.2$ ,  $\lambda = 0.4$  时,  $\beta_1$  分别为  $\beta_1 = 0.5$ 、 $\beta_1 = 0.7$ 、 $\beta_1 = 0.9$ ;
3. 当  $\beta_0 = 0.2$ ,  $\beta_1 = 0.3$  时,  $\lambda$  分别为  $\lambda = 0.2$ 、 $\lambda = 0.6$ 、 $\lambda = 0.8$ 。

由表2可以看出，不管参数  $\beta_0$  取值如何变动，所有未知参数的误差都比较小，并且精度有效位数均没有变化，并且 MAE 值都比较接近。由此可得， $\beta_0$  的取值对未知参数的贝叶斯估计值不敏感，说明  $\beta_0$  的变化不会大幅度影响贝叶斯参数估计的效果。

表 2 基于  $\beta_1 = 0.3$ ， $\lambda = 0.4$  的贝叶斯估计结果

| 参数             | $\beta_0 = 0.4$ |         |        | $\beta_0 = 0.6$ |         |        | $\beta_0 = 0.8$ |         |        |
|----------------|-----------------|---------|--------|-----------------|---------|--------|-----------------|---------|--------|
|                | 估计值             | ERR     | MAE    | 估计值             | ERR     | MAE    | 估计值             | ERR     | MAE    |
| $\beta_0$      | 0.3795          | -0.0205 | 0.0545 | 0.5693          | -0.0307 | 0.0665 | 0.7726          | -0.0274 | 0.0560 |
| $\beta_1$      | 0.2937          | -0.0063 | 0.0450 | 0.2859          | -0.0141 | 0.0430 | 0.2934          | -0.0066 | 0.0372 |
| $\lambda$      | 0.3877          | -0.0123 | 0.0565 | 0.3747          | -0.0253 | 0.0503 | 0.3753          | -0.0247 | 0.0616 |
| $\sigma_\mu^2$ | 1.0177          | 0.0177  | 0.0820 | 1.0185          | 0.0853  | 0.1070 | 1.0206          | 0.0809  | 0.1056 |

表 3 基于  $\beta_0 = 0.2$ ， $\lambda = 0.4$  的贝叶斯估计结果

| 参数             | $\beta_1 = 0.5$ |         |        | $\beta_1 = 0.7$ |         |        | $\beta_1 = 0.9$ |         |        |
|----------------|-----------------|---------|--------|-----------------|---------|--------|-----------------|---------|--------|
|                | 估计值             | ERR     | MAE    | 估计值             | ERR     | MAE    | 估计值             | ERR     | MAE    |
| $\beta_0$      | 0.1818          | -0.0182 | 0.0511 | 0.1818          | -0.0182 | 0.0511 | 0.1878          | -0.0122 | 0.0581 |
| $\beta_1$      | 0.4974          | -0.0026 | 0.0413 | 0.6923          | -0.0077 | 0.0417 | 0.8788          | -0.0212 | 0.0457 |
| $\lambda$      | 0.3717          | -0.0283 | 0.0551 | 0.3717          | -0.0283 | 0.0551 | 0.3877          | -0.0123 | 0.0549 |
| $\sigma_\mu^2$ | 1.0248          | 0.0248  | 0.0881 | 1.0245          | 0.0245  | 0.0880 | 1.0185          | 0.0185  | 0.0737 |

表 4 基于  $\beta_0 = 0.2$ ， $\beta_1 = 0.3$  的贝叶斯估计结果

| 参数             | $\lambda = 0.2$ |         |        | $\lambda = 0.6$ |         |        | $\lambda = 0.8$ |         |        |
|----------------|-----------------|---------|--------|-----------------|---------|--------|-----------------|---------|--------|
|                | 估计值             | ERR     | MAE    | 估计值             | ERR     | MAE    | 估计值             | ERR     | MAE    |
| $\beta_0$      | 0.1951          | -0.0049 | 0.0475 | 0.1912          | -0.0088 | 0.0615 | 0.1888          | -0.0112 | 0.0474 |
| $\beta_1$      | 0.2892          | -0.0108 | 0.0363 | 0.2954          | -0.0046 | 0.0410 | 0.2882          | -0.0118 | 0.0359 |
| $\lambda$      | 0.1949          | -0.0051 | 0.0484 | 0.5748          | -0.0252 | 0.0579 | 0.7580          | -0.0420 | 0.0596 |
| $\sigma_\mu^2$ | 1.0168          | 0.0168  | 0.0963 | 1.0184          | 0.0184  | 0.0880 | 1.0205          | 0.0205  | 0.0717 |

根据表3可以看出，不管参数  $\beta_1$  取值如何变动，所有未知参数的误差都比较小，精度有效位数均没有变化，并且 MAE 值都比较接近。由此可得， $\beta_1$  的取值对未知参数的贝叶斯估计值不敏感，说明  $\beta_1$  的变化不会大幅度影响贝叶斯参数估计的效果。同理，由表4可看出，不管参数  $\lambda$  取值如何变动，所有未知参数的误差绝对值均小于0.03，精度有效位数也没有变化，并且 MAE 值都比较接近，无大幅变化。即  $\lambda$  取值对未知参数的贝叶斯估计值不敏感，说明  $\lambda$  的变化也会大幅度影响贝叶斯参数估计的效果。

#### 四、总结

本文运用贝叶斯推断的手段，推导得出一阶误差修正模型各参数的条件后验分布，并利用 Gibbs 抽样法的 MCMC 算法来实现一阶误差修正模型的参数估计。模拟实验的结果说明了运用贝叶斯推断的方法来估计模型参数的结果较为理想，得到的一阶误差修正模型未知参数的贝叶斯估计值比较精准。进一步，为探究样本值的变动是否会影响贝叶斯参数估计的效果，经过多次模拟实验，可以说明：Gibbs 抽样方法结果比较稳定，针对参数样本值的变化对未知参数的贝叶斯估计值不敏感，表明样本值的变化不会

大幅度影响贝叶斯参数估计的效果。

#### 参考文献

- [1] 李小鸭, 邵艺萱. 基于误差修正模型的中国居民消费对经济增长的影响研究 [J]. 现代商业, 2020(22): 28-30.
- [2] 张艳芳. 中国技术贸易与经济增长关系研究——基于协整与误差修正模型的分析 [J]. 技术经济, 2023, 42(12): 97-108.
- [3] 李光明. 中国金融科技与新质生产力增长关系研究——基于协整与误差修正模型分析 [J]. 黑龙江金融, 2024, (11): 36-40.
- [4] 刘畅, 高铁梅. 中国电力行业周期波动特征及电力需求影响因素分析——基于景气分析及误差修正模型的研究 [J]. 资源科学, 2011, 33(01): 169-177.
- [5] 汪兴瑞. 我国原油期货价格关系的研究 [D]. 延安大学, 2019.
- [6] 刘金山, 夏强. 基于 MCMC 算法的贝叶斯统计方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [7] 夏强, 刘金山. 基于贝叶斯推断的 TAR 模型的门限非线性检验 [J]. 应用概率统计, 2011, 27(03): 276-282.
- [8] 夏强, 梁茹冰, 刘金山. 基于 AR 和 TAR 模型的变点问题分析 [J]. 徐州师范大学学报 (自然科学版), 2011, 29(03): 49-53.
- [9] 刘贞, 周菊玲, 董翠玲. 基于 MCMC 算法的多元线性回归变点模型的贝叶斯估计 [J]. 河南科学, 2020, 38(08): 1210-1214.
- [10] 李凡群, 韦善然. 基于 Gibbs 抽样算法的两参数 Pareto 分布的 Bayes 估计 [J]. 阜阳师范大学学报 (自然科学版), 2023, 40(04): 8-13. DOI:10.14096/j.cnki.cn34-1069/n/2096-9341(2023)04-0008-06.