借题发挥　发展思维
——对一道教材例题的探究与反思

林庆伦
开平市教师发展中心，广东 江门 529300

摘　　要： 教材例题有很大的应用价值，本文以一道教材例题为载体，通过解法探究、变式探究，链接高考，研后反思等步骤，深入挖掘例题中所蕴含的概念、性质等应用价值，提升学生数学学科核心素养，助力教师专业成长等目标。

关 键 词： 教材例题；探究；反思

Use The Topic to Develop Thinking
— Inquiry and Reflection on A Textbook Example

Lin Qinglun
Kaiping Teacher Development Center, Jiangmen, Guangdong 529300

Abstract: The examples in textbooks have significant application value. This paper uses one such example as a vehicle, exploring its solution methods and variations, linking it to college entrance exams, and conducting post-research reflections. Through these steps, the paper aims to deeply uncover the concepts and properties embedded in the example, enhancing students 'core mathematical competencies and supporting teachers' professional development.

Keywords: textbook example; inquiry; reflection

高中数学教材里的每一个例题的设置都有其目的和作用，承载着相应知识的能力要求，蕴含非常丰富的应用价值. 喻平教授曾经指出：显性知识不足以涵盖数学核心素养的全野，与数学核心素养相关的内容恰好是隐形知识，因此在教材分析中必须要对隐形知识作分析。[1]在教学活动中，教师应设计合适的情境和问题，科学、准确地把握教材例题的容量与难度，开发一些具有应用性、开放性、探究性的问题，[2]让新知与学生认知结构中的已有的知识之间建立联系，在变化的过程中突出知识的本质属性，从而实现对知识多角度、全方位的理解，[3]鼓励学生创造性思维，提高思维品质。

本文以人教 A 版高中教材数学选择性必修第一册第 136 页例 5 为例，进行深入探究，将研究过程整理成文与读者交流学习。

一、例题呈现

经过抛物线焦点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，经过点 A 和抛物线顶点的直线交抛物线准线于点 D，求证：直线 BD 平行于抛物线的对称轴。[4]

二、解法探究

证明 如图1, 以抛物线的对称轴为 x 轴，以抛物线的顶点为原点 O，建立平面直角坐标系。设抛物线的标准方程为 $y^2=2px(p>0)$，点 A 的坐标为 $\left(\dfrac{y_A^2}{2p},y_A\right)$，则直线 OA 的方程为 $y=\dfrac{2p}{y_A}x\left(y_0\neq 0\right)$。

因为抛物线的准线方程为 $x=-\dfrac{p}{2}$，

所以联立方程 $y=\dfrac{2p}{y_A}x$ 与 $x=-\dfrac{p}{2}$ 得到点 D 的纵坐标为 $-\dfrac{p^2}{y_A}$。

因为焦点 F 的坐标为 $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，点 A 的坐标为 $\left(\dfrac{y_A^2}{2p},y_A\right)$，

所以直线 AF 的斜率为 $k_{AF}=\dfrac{y_A}{\dfrac{y_A^2}{2p}-\dfrac{p}{2}}=\dfrac{2py_A}{y_A^2-p^2}$，其中 $y_A^2\neq p^2$。

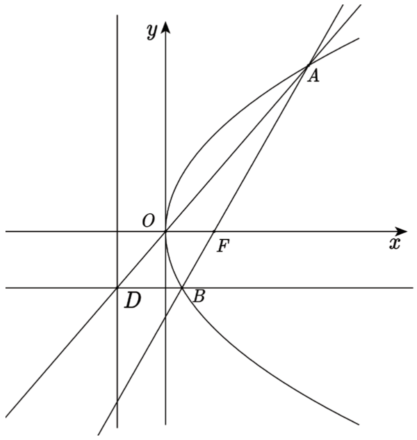
所以直线 AF 的方程为 $y=\dfrac{2py_A}{y_A^2-p^2}\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$，其中 $y_A^2\neq p^2$。

联立方程 $y^2=2px$ 与 $y=\dfrac{2py_A}{y_A^2-p^2}\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$ 可得点 B 的纵坐标为 $-\dfrac{p^2}{y_A}$，

项目/基金信息：2024年广东省中小学“百千万人才培养工程”专项科研项目《指向核心素养的高中数学概念课教学设计研究与实践》（课题编号：BQW2024TGL004）.
作者简介：林庆伦（1985.02- ），男，汉族，广东省江门市人，开平市教师发展中心高中数学教研员，研究方向：高中数学教育。

所以直线 DB 平行于 x 轴．当 $y_A^2=p^2$ 时，结论显然成立。

所以直线 DB 平行于抛物线的对称轴。



> 图1

教材右侧有旁白：你还有其他证明方法吗？教科书旁白中留下的方法之白，既为学生“采取阅读自学、独立思考、实践探究、合作交流等多种学习方式”供给着内容素材，同时显化数学教学中“方法之美”的意蕴。[5]在给出第二种证明方法之前，先给出引例：

引例 若过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的一条直线 l 和抛物线相交，两交点为 $A(x_1,y_1)$ ，$B(x_2,y_2)$ ，则 $y_1y_2=-p^2$ 。[6]

另证 设抛物线的方程为 $y^2=2px(p>0)$ ，点 $A\left(\dfrac{y_A^2}{2p},y_A\right)$ ，点 $B(x_B,y_B)$ ，点 $D\left(-\dfrac{p}{2},y_D\right)$ 。根据抛物线焦点弦的性质可得 $y_Ay_B=-p^2$ ，所以 $y_B=-\dfrac{p^2}{y_A}$ 。

因为 A,O,D 三点共线，所以 $k_{OA}=k_{OD}$ ，所以 $\dfrac{2p}{y_A}=\dfrac{y_D}{-\dfrac{p}{2}}$ ，

即有 $y_Ay_D=-p^2$ ，所以 $y_D=-\dfrac{p^2}{y_A}=y_B$ ，

所以直线 DB 平行于抛物线的对称轴。

三、变式探究

由上面的证明过程可知：直线 DB 平行于抛物线的对称轴。这是巧合还是必然？引发笔者的思考。通过一系列的探究验证，发现平行于抛物线的对称轴的直线可得出另外一个性质。

性质1 如图2，设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F ，经过点 F 的直线交抛物线 C 于 A,B 两点，与直线 $x=-\dfrac{p}{2}$ 交于点 T ，过点 T 作 x 轴的平行线 l ，直线 AO,OB 与直线 l 交于 S,Q 两点，则 $ST=TQ$ 。

证明：由题意可知，直线 AB 的斜率存在，设直线

$AB:x=my+\dfrac{p}{2}$ ，$A(x_A,y_A)$ ，$B(x_B,y_B),T(x_T,y_T)$ 。

联立方程 $\begin{cases}x=my+\dfrac{p}{2},\\ y^2=2px,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-2mpy-p^2=0$ ，

则 $\Delta=4m^2p^2+4p^2>0,y_A+y_B=2mp,y_A\cdot y_B=-p^2$ ，

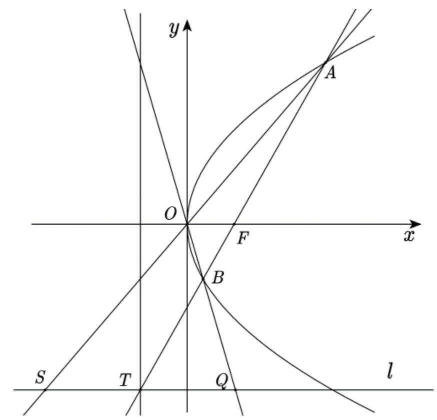
直线 $AB:x=my+\dfrac{p}{2}$ 与直线 $x=-\dfrac{p}{2}$ 的交点 $T\left(-\dfrac{p}{2},-\dfrac{p}{m}\right)$ ，

直线 $AO:y=\dfrac{y_A}{x_A}x$ 与直线 $l:y=-\dfrac{p}{m}$ 的交点 $S\left(-\dfrac{px_A}{my_A},-\dfrac{p}{m}\right)$ ，

直线 $BO:y=\dfrac{y_B}{x_B}x$ 与直线 $l:y=-\dfrac{p}{m}$ 的交点 $Q\left(-\dfrac{px_B}{my_B},-\dfrac{p}{m}\right)$ ，

由于 $x_S+x_Q=-\dfrac{px_A}{my_A}-\dfrac{px_B}{my_B}=-\dfrac{p}{m}\left(\dfrac{x_A}{y_A}+\dfrac{x_B}{y_B}\right)=-p\left(\dfrac{y_A}{2p}+\dfrac{y_B}{2p}\right)=-p=2x_T$ ，

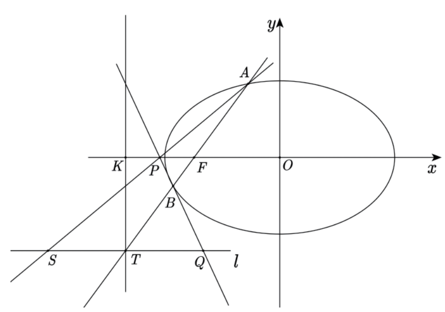
所以 $ST=TQ$ 。



> 图2

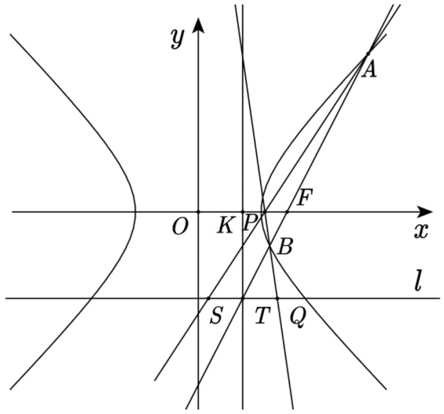
这里可以揣测，在抛物线中发现了焦点弦的这个性质，自然联想到：在椭圆与双曲线中，此结论是否还成立？通过探究验证，答案是肯定的。

性质2 如图3，设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F ，直线 $x=-\dfrac{a^2}{c}$ 与 x 轴交于点 K ，线段 FK 的中点为 P ，经过点 F 的直线交椭圆交于 A,B 两点，与直线 $x=\dfrac{a^2}{c}$ 交于点 T ，过点 T 作 x 轴的平行线 l ，直线 AP,BP 与直线 l 交于 S,Q 两点，则 $ST=TQ$ 。



> 图3

性质3 如图4，设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F ，直线 $x=\dfrac{a^2}{c}$ 与 x 轴交于点 K ，线段 FK 的中点为 P ，经过点 F 的直线交双曲线交于 A,B 两点，与直线 $x=\dfrac{a^2}{c}$ 交于点 T ，过点 T 作 x 轴的平行线 l ，直线 AP,BP 与直线 l 交于 S,Q 两点，则 $ST=TQ$ 。



> 图4

性质2,3的证明类似性质1,这里不再赘述。

对上述的性质进行逆向探究，若 $ST=TQ$ ，点 T 与于 A,B 两点的位置关系如何?

性质4 如图2,设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F ，经过点 F 的直线交抛物线 C于 A,B 两点，过直线 $x=-\frac{p}{2}$ 上点 T 作 x 轴的平行线 l ，直线 AO,OB 与直线 l 交于 S,Q 两点，且 $ST=TQ$ ，则 A,B,F,T 四点共线。

证明：由题意可知，直线 AB 的斜率存在，设直线 $AB:x=my+\frac{p}{2}$, $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$， $T(-\frac{p}{2},t)$， 则直线 $l:y=t$ ，

联立方程 $\begin{cases}x=my+\frac{p}{2},\\ y^2=2px,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-2mpy-p^2=0$ ，

则 $\Delta=4m^2p^2+4p^2>0, y_A+y_B=2mp, y_A\cdot y_B=-p^2$ ，

直线 $AO:y=\frac{y_A}{x_A}x$ 与直线 $l:y=t$ 的交点 $S\left(\frac{tx_A}{y_A},t\right)$ ，

直线 $BO:y=\frac{y_B}{x_B}x$ 与直线 $l:y=t$ 的交点 $Q\left(\frac{tx_B}{y_B},t\right)$ ，

因为 $ST=TQ$ ，所以 $\frac{tx_A}{y_A}+\frac{tx_B}{y_B}=\frac{t(y_A+y_B)}{2p}=tm=-p$ ，

于是， $t=-\frac{p}{m}$ ，

因为 $k_{FT}=\frac{t-0}{-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}}=\frac{-\frac{p}{m}}{-p}=\frac{1}{m}$ ， $k_{AB}=\frac{1}{m}$ ，

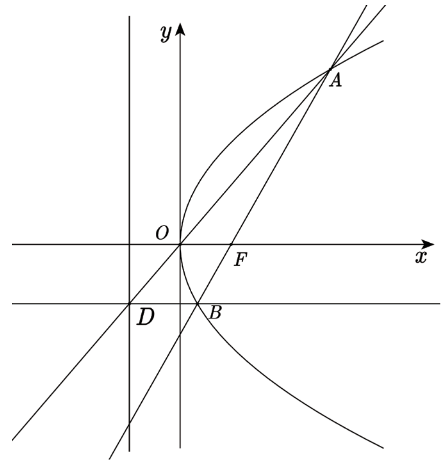
所以 A,B,F,T 四点共线。

性质5 如图3,设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F ，直线 $x=-\frac{a^2}{c}$ 与 x 轴交于点 K ，线段 FK 的中点为 P ，经过点 F 的直线交椭圆交于 A,B 两点，过直线 $x=-\frac{a^2}{c}$ 上点 T 作 x 轴的平行线 l ，直线 AP,BP 与直线 l 交于 S,Q 两点，且 $ST=TQ$ ，则 A,B,F,T 四点共线。

性质6 如图4,设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F ，直线 $x=\frac{a^2}{c}$ 与 x 轴交于点 K ，线段 FK 的中点为 P ，经过点 F 的直线交双曲线交于 A,B 两点，过直线 $x=\frac{a^2}{c}$ 上点 T 作 x 轴的平行线 l ，直线 AP,BP 与直线 l 交于 S,Q 两点，且 $ST=TQ$ ，则 A,B,F,T 四点共线。

性质5,6的证明类似性质4,这里不再赘述。

性质7 如图5,设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F ，经过点 F 的直线交抛物线 C 于 A,B 两点，点 B 作 x 轴的平行线 l 与直线 AO 延长线交于点 D 。求证： D 点在一条定值线上。



> 图5

证明：由 A,O,D 点共线得 $K_{OA}=K_{OD}$ ，

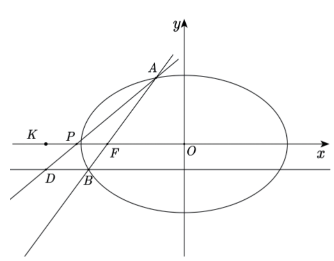
所以 $\frac{y_A}{\frac{y_A^2}{2p}}=\frac{y_D}{x_D}$ ，即 $x_D=\frac{y_A\cdot y_D}{2P}$

因为直线 BD 平行 x 抽，所以 $y_B=y_D$ 。

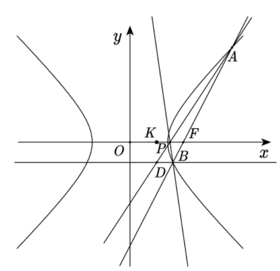
由引例知 $y_A\cdot y_B=-p^2$ ，则 $x_D=\frac{y_A\cdot y_B}{2p}=\frac{-p^2}{2p}=-\frac{p}{2}$ 。

所以 D 点在定直线 $x=-\frac{P}{2}$ 上。

性质8 如图6,设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F ，已知点 $K(-\frac{a^2}{c},0)$ ，线段 FK 的中点为 P ，经过点 F 的直线交椭圆于 A,B 两点，过点 B 作 x 轴的平行线 l ， l 与直线 AP 交于点 D 。求证： D 点在一条定直线上。



> 图6



> 图7

性质9 如图7,设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F ，已知点 $K(\frac{a^2}{c},0)$ ，线段 FK 的中点为 P ，经过点 F 的直线交椭圆于 A,B 两点，过点 B 作 x 轴的平行线 l ， l 与直线 AP 交于点 D 。求证： D 点在一条定直线上。

性质8,9的证明类似性质7,这里不再赘述。

四、链接高考

从该教材例题衍生出的考题往往题干简洁、思维性强，曾经很多高考试题都有它的影子。

（一）（2024年高考数学全国甲卷理科第20题）设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，点 $M(1,\frac{3}{2})$ 在 C 上，且 $MF\perp x$轴.（1）求 C 的方程；（2）经过点 $P(4,0)$ 的直线交 C 交于 A,B 两点，N 为线段 FP 的中点，直线 NB 交直线 MF 于点 Q。证明：$AQ\perp y$ 轴。

（二）（2001年高考数学全国卷理科第19题）抛物线 $y^2=2px(P>0)$ 的焦点为 F，经过点 F 的直线交抛物线交于 A、B 两点，点 C 在抛物线的准线上，且 $BC//x$ 轴，证明直线 AC 经过原点 O。

五、研后反思

教材中的例题与习题，其选编的原则是帮助学生深入理解圆锥曲线的几何特征，熟练研究圆锥曲线的性质以及它们的位置关系，并能解决有一定综合性的问题，通过解题感悟解析几何中蕴含的数学思想。教学中应注意这些题目的教学功能，使学生认识到认真解答这些题目的重要性，必要时可以对有关题目进行适当的变式拓展。[7]从上面的案例可以看出，9个性质拓展结论均立足教材例题，其中性质1、4、7均为对教材例题的抛物线模型通过改变问题的情境、条件、障碍和目标等方式进行优化延伸探究，[8]其他性质均自然地过渡到椭圆和双曲线等模型，最大限度地发挥例题的内在价值，因此教师需要在教学过程中注意：

（一）引导立足教材，实现系统认知

教师要立足教材让教材串起来，充分挖掘教材的例题蕴含的丰富的数学思想与方法，促使学生在相互思考、交流、启发、提升中获得对数学概念本质的理解，主动建构知识，扩展和完善知识体系，实现从“散点知识”到“系统认知”，提高学生学习热情和深度学习的能力。

（二）优化延伸教材，促进思维生长

教师要延伸教材让教材活起来，善于对教材中的经典例题进行变式、拓展、整合，并注意把握延伸的“度”与“向”，从“教教材”转变为“用教材”，促使学生多层次、多角度、全方位探究问题，促进从“解题训练”转变到“思维生长”，提升学生思维品质和核心素养能力。

（三）发挥主观能动性，发展创新意识

教师要发挥学生的主观能动性，通过与学生一起共同交流探讨教学互动，让学生通过阅读、思考、表达等一系列学习活动，促使学生思维的进一步加工，发展他们的创新意识和创新能力。

总之，教学中教师要基于教材，钻研教材，利用广泛的教学资源，活用教材，创生教材，灵活、创意地使用教材，实现教材的再创造和二次开发，[9]并建立合适的教学“脚手架”，帮助学生建立新旧知识的内在实质性联系，促进学生最近发展区的发展，[10]最终提升学生数学学科核心素养。

参考文献

[1] 喻平. 发展学生数学核心素养的教学与评价研究［M］. 上海：华东师范大学出版社，2021.
[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准：2017年版2020年修订［M］. 北京：人民教育出版社，2020.
[3] 涂荣豹. 数学教学设计原理的构建—教学生学会思考［M］. 北京：科学出版社，2018.
[4] 人民教育出版社，课程教材研究所，中学数学课程教材研发中心. 普通高中教科书 A版・数学（选择性必修第一册）［M］. 北京：人民教育出版社，2020.
[5] 韩粟，刘倩雯，汪晓勤. 数学教科书“旁白”中的“留白”探析——以人教 A 版高中数学教科书为例［J］. 数学教育学报，2024（8）：20-25.
[6] 马晋华. 一道课本例题的研究与拓展［J］. 中学数学，2017（4）：84-85.
[7] 章建跃. 圆锥曲线的方程教材介绍与教学建议［J］. 中学数学教学研究，2021（1）：8-16.
[8] 李昌官. 走向素养为本的数学变式教学［J］. 课程・教材・教法，2021（8）：98-104.
[9] 余文森等. 有效备课・上课・听课・评课［M］. 福州：福建教育出版社，2008.
[10] 章建跃，王嵘. 中国数学教科书使用变式素材的途径和方法［J］. 数学通报，2015（10）：1-8.