

奇妙的数学

欧建

四川轻化工大学机械工程学院, 四川 自贡 643000

DOI: 10.61369/EDTR.2025010037

摘 要 : 在人类历史发展和社会生活中, 数学发挥着不可替代的作用, 同时也是学习和研究现代科学技术必不可少的基本工具。

关 键 词 : 不等式; 费曼积分法; 阶乘; 微积分

Wonderful Mathematics

Ou Jian

School of Mechanical Engineering, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong, Sichuan 643000

Abstract : In the development of human history and social life, mathematics plays an irreplaceable role, and is also an essential basic tool for learning and researching modern science and technology.

Keywords : Inequalities; Feynman integration; factorials; calculus

引言

数学是一门奇妙的学科, 通过学习数学可以使得人们的逻辑思维能力有所提高, 本文的目的是增加读者对于数学的兴趣。

证明: 若 $x+y>0$, 则有 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$, 当且仅当 $ay=bx$ 时等号成立, x, y 的取值范围: $xy>0$; 若 $x+y<0$, 则有 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \leq \frac{(a+b)^2}{x+y}$, 当且仅当 $ay=bx$ 时等号成立, x, y 的取值范围: $xy<0$

由柯西不等式知: $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$, 当且仅当 $ac+bd$ 时等号成立, 所以有 $(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y})(y+x) \geq (a+b)^2$ 当且仅当 $a^2y^2=b^2x^2$ 时等号成立, 即 $ay=bx$ 且存在 $xy>0$ 或 $xy<0$ 两种情况, 对于 $x+y>0$ 有

$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{(y+x)}$, 对于 $x+y<0$ 有 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \leq \frac{(a+b)^2}{(y+x)}$, 于是有以下两种情况: 若 $x+y>0$, 有 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{(y+x)}$, x, y 取值范围 $xy>0$ 或 $xy<0$; 若 $x+y<0$, 有 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \leq \frac{(a+b)^2}{(y+x)}$, x, y 取值范围 $xy>0$ 或 $xy<0$ 。

对于 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{(y+x)}$, 设 $y=tx$, $a=2, b=3$ 于是就有 $\frac{2^2}{x} + \frac{3^2}{t-x} \geq \frac{25}{t}$, 当且仅当 $x=\frac{2}{5}t$ 时等号成立 $t>0$, 有 $x+t-x=t>0$, 假设取值范围: $x+(t-x)>0$ 则有 $0<x<t$, 因为 $t>0$, 符合取值范围, 所以假设成立, 显然就有 $x(t-x)<0$ 不成立。于是就有若 $x+y>0$, 有 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{(y+x)}$, 当且仅当 $ay=bx$ 等号成立, x, y 取值范围 $xy>0$ 。

对于 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \leq \frac{(a+b)^2}{(y+x)}$, 设 $y=-tx$, $a=2, b=3$ 于是就有 $\frac{2^2}{x} + \frac{3^2}{-t-x} \leq -\frac{25}{t}$, 当且仅当 $x=-\frac{2}{5}t$ 时等号成立, $t>0$, 有 $x-t-x=-t<0$, 假设取值范围: $x(-t-x)>0$ 即 $-t<x<0$, 因为 $t>0$, 符合取值范围, 所以假设成立, 显然就有 $x(-t-x)<0$ 不成立。于是就有若 $x+y<0$, 则有

$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \leq \frac{(a+b)^2}{(y+x)}$, 当且仅当 $ay=bx$ 等号成立, x, y 取值范围: $xy>0$ 。

综上所述有: 若 $x+y>0$, 则 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$, 当且仅当 $ay=bx$ 时取等, x, y 取值范围: $xy>0$; 若 $x+y<0$, 则 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \leq \frac{(a+b)^2}{x+y}$, 当且仅当 $ay=bx$ 时取等, x, y 取值范围 $xy<0$ 。

证明: $\int_0^{+\infty} x^n e^{-(b+1)x} dx = \frac{n!}{(1+b)^{n+1}}, b>-1$

假设 $I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-(b+1)x} dx = \frac{e^{-(b+1)x}}{b+1} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{b+1}, b>-1$, 于是就有

$I'(b) = -\int_0^{+\infty} x e^{-(b+1)x} dx = -\frac{1}{(1+b)^2}$, 有 $I^{(2)}(b) = (-1)^2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-(b+1)x} dx = \frac{(-1)^2 2}{(1+b)^3}$,

$I^{(3)}(b) = (-1)^3 \int_0^{+\infty} x^3 e^{-(b+1)x} dx = \frac{(-1)^3 6}{(1+b)^4}, \dots\dots$,

依次类推有:

$I^{(n)}(b) = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-(b+1)x} dx = \frac{(-1)^n n!}{(1+b)^{n+1}}$, 所以有

$\int_0^{+\infty} x^n e^{-(b+1)x} dx = \frac{n!}{(1+b)^{n+1}}, b>-1$ 。

证明: 对于 $b>-1$ 有 $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-(1+b)x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 1}{2^{n+1}(b+1)^{\frac{n+1}{2}}}$,

$\int_0^{+\infty} e^{-(1+b)x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b+1}}$

假设 $I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-(1+b)x^2} dx, b>-1$, 令 $t = \sqrt{b+1}x$, 则, $dx = \frac{1}{\sqrt{b+1}} dt$ 于是

$$\text{就有} \int_0^{+\infty} e^{-(1+b)x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{b+1}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b+1}},$$

$$I'(b) = -\int_0^{+\infty} x^2 e^{-(1+b)x^2} dx = (-1)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} (b+1)^{-\frac{3}{2}},$$

$$I^{(2)}(b) = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-(1+b)x^2} dx = (-1)^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} (b+1)^{-\frac{5}{2}}, \dots, \dots,$$

依次类推有:

$$I^{(n)}(b) = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-(1+b)x^2} dx \\ = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi} (2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 1}{2^n} (b+1)^{-\frac{1}{2}n}.$$

所以有对于 $b > -1$,

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-(b+1)x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} (2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 1}{2^{n+1} (b+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

证明: 对于 $b > -1$ 有

$$\int_0^{+\infty} x^{na} e^{-(b+1)x^a} dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{a}) [1 + (n-1)a] \times [1 + (n-2)a] \dots 1}{a^{n+1} (b+1)^{\frac{1}{a}n}},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-(b+1)x^a} dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{a})}{a(b+1)^{\frac{1}{a}}}.$$

$$\text{假设 } I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-(b+1)x^a} dx, \quad b > -1, \quad \text{令 } t = (b+1)x^a,$$

$$\text{则 } dx = \frac{1}{a} t^{\frac{1}{a}-1} (b+1)^{-\frac{1}{a}} dt, \quad \text{有 } I(b) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{a} t^{\frac{1}{a}-1} (b+1)^{-\frac{1}{a}} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{a})}{a(b+1)^{\frac{1}{a}}}.$$

$$I'(b) = -\int_0^{+\infty} x^a e^{-(b+1)x^a} dx = -\frac{\Gamma(\frac{1}{a})(b+1)^{-\frac{1}{a}-1}}{a^2},$$

$$I^{(2)}(b) = \int_0^{+\infty} x^{2a} e^{-(b+1)x^a} dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{a})(\frac{a+1}{a})(b+1)^{-\frac{1}{a}-2}}{a^2}, \dots, \dots,$$

以此类推有:

$$I^{(n)}(b) = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^{na} e^{-(b+1)x^a} dx = (-1)^n \frac{\Gamma(\frac{1}{a}) [1 + (n-1)a] \times [1 + (n-2)a] \dots 1}{a^{n+1} (b+1)^{\frac{1}{a}n}}, \quad \text{即}$$

$$\int_0^{+\infty} x^{na} e^{-(b+1)x^a} dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{a}) [1 + (n-1)a] \times [1 + (n-2)a] \dots 1}{a^{n+1} (b+1)^{\frac{1}{a}n}}, \quad b > -1.$$

$$\text{证明: } (n - \frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi} (2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 1}{2^n},$$

$$(\frac{1}{2} - n)! = \frac{2^n (n - \frac{1}{2})\pi}{\sqrt{\pi} \sin[(n - \frac{1}{2})\pi] (2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 1}$$

$$\text{根据前面的证明有令 } b=1 \text{ 则 } \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} (2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 1}{2^{n+1}},$$

知伽玛函数 $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = (a-1)!$, 令 $t=x^2$, 则 $dt=2xdx$, 于

是就有 $\Gamma(a) = 2 \int_0^{+\infty} x^{2a-1} e^{-x^2} dx = (a-1)!$, 令则有

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{(n - \frac{1}{2})!}{2}, \quad \text{所以 } (n - \frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi} (2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 1}{2^n}.$$

由 $\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$, 知

$$\Gamma(1-x)\Gamma(1+x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}, \quad \text{由 } \Gamma(1+x) = x!, \quad \text{知 } (-x)!x! = \frac{\pi x}{\sin \pi x},$$

令 $x = n - \frac{1}{2}$, 于是就有 $(\frac{1}{2} - n)!(n - \frac{1}{2})! = \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{\sin[(n - \frac{1}{2})\pi]}$, 所以有

$$(\frac{1}{2} - n)! = \frac{2^n (n - \frac{1}{2})\pi}{\sqrt{\pi} \sin[(n - \frac{1}{2})\pi] (2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 1}.$$

证明: $(n!) = n![(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) - \gamma]$, 其中 γ 为欧拉常数假设

$(n!) = n![(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) + C]$ 成立, 则有

$[(n-1)!]' = (n-1)![(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}) + C]$, 因为 $(n-1)! = \frac{n!}{n}$, 所以

$$[(n-1)!]' = \frac{(n!)n - n!}{n^2}, \quad \text{因为 } \frac{(n!)n - n!}{n^2} = \frac{n![(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) + C]n - n!}{n^2}$$

$$= (n-1)![(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) + C] - \frac{(n-1)!}{n} = (n-1)![(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}) + C],$$

所以根据数学归纳法知假设成立, 所以就有

$$(n!) = n![(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) + C].$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!) = \lim_{n \rightarrow \infty} n! \ln(n)$ [1], 又因为

$\lim_{n \rightarrow \infty} (n!) = \lim_{n \rightarrow \infty} n![(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) + C]$, 所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n![(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) + C] = \lim_{n \rightarrow \infty} n! \ln(n),$$

于是就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) + C$. 又因为

$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} [(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) - \ln(n)]$, 所以 $C = -\gamma$, 所以

$(n!) = n![(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) - \gamma]$, 其中 γ 为欧拉常数。

证明: $\int_0^{+\infty} \ln(t) t^n e^{-t} dt = n![(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) - \gamma]$, 其中 γ 为欧拉常数

知 $\Gamma(n+1) = n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$, 于是有

$(n!) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^n e^{-t} dt = n![(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) - \gamma]$, 其中 γ 为欧拉常数。

证明: $\int_0^{+\infty} x^n \ln(x) e^{-(b+1)x} dx = \frac{n![(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) - \gamma - \ln(b+1)]}{(1+b)^{n+1}}$, $b > -1$, 其中

γ 为欧拉常数

知 $(n!) = n![(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) - \gamma]$, 由前面推导知

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-(b+1)x} dx = \frac{n!}{(1+b)^{n+1}}, \quad b > -1, \quad \text{所以就有}$$

$$(1+b)^{n+1} \int_0^{+\infty} x^n e^{-(b+1)x} dx = n!, \quad \text{设}$$

$$I(n) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(b+1)x} dx = \frac{n!}{(1+b)^{n+1}}, \quad \text{于是有}$$

$$(n!) = (1+b)^{n+1} \ln(1+b) I(n) + (1+b)^{n+1} I'(n),$$

$$\text{即有 } I'(n) = \frac{n![(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) - \gamma - \ln(b+1)]}{(1+b)^{n+1}},$$

由于 $I'(n) = \int_0^{+\infty} x^n \ln(x) e^{-(b+1)x} dx$, 于是有

$$\int_0^{+\infty} x^n \ln(x) e^{-(b+1)x} dx = \frac{n![(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) - \gamma - \ln(b+1)]}{(1+b)^{n+1}}, \quad b > -1, \text{ 其中 } \gamma \text{ 为欧拉常数。}$$

证明: $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt = -\gamma$, 其中 γ 为欧拉常数

知 $\int_0^{+\infty} \ln(t) t^n e^{-t} dt = n![(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) - \gamma]$, 令 $n=1$ 则有 $\int_0^{+\infty} \ln(t) t e^{-t} dt = 1 - \gamma$,

令 $u=t \ln(t)$, $dv=e^{-t} dt$, 则有 $du=[\ln(t)+1]dt$, $v=-e^{-t}$, 由

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u dv &= uv - \int_0^{+\infty} v du \quad \text{知} \int_0^{+\infty} t \ln(t) e^{-t} dt \\ &= -t \ln(t) e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} [\ln(t)+1] e^{-t} dt, \text{ 由于} \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \ln(t) e^{-t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} t \ln(t) e^{-t} = 0, \quad \text{因}$$

$$\int_0^{+\infty} [\ln(t)+1] e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt, \quad \text{又因}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 1, \quad \text{于是就有 } 1 + \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt = 1 - \gamma,$$

所以就有 $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt = -\gamma$, 其中 γ 为欧拉常数。

证明: 如果 $I(b) = \int_0^{+\infty} f(x, b) dx = C$ 则对其求导的结果不成立

$$\text{设 } I(b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx, \quad \text{令 } bx=t, \quad \text{则 } dx = \frac{dt}{b}$$

$$\text{即 } \int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad \text{就有 } I(b) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{两边同时求}$$

导有 $I'(b)=0$, 即有 $\int_0^{+\infty} \cos bxdx = 0$ 。假设 $\int_0^{+\infty} \cos bxdx = 0$ 成立,

则有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin bx = 0$, 有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos bx = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \sin^2 bx} = 1$, 不难发现有

$$I'(b)=0, \quad \text{即 } \int_0^{+\infty} x \sin bxdx = 0, \quad \text{因 } \int_0^{+\infty} x \sin bxdx = \frac{\sin bx - bx \cos bx}{b^2} \Big|_0^{+\infty} \text{ 所}$$

$$\text{以有 } \lim_{x \rightarrow \infty} \sin bx - bx \cos bx = 0, \quad \text{因为 } \lim_{x \rightarrow \infty} \sin bx = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos bx = 1, \quad \text{所以 } \lim_{x \rightarrow \infty} \sin bx - bx \cos bx = 0 \text{ 不成立。所以最初}$$

的假设不成立, 即 $\int_0^{+\infty} \cos bxdx = 0$ 不成立。所以可以知道当

$I(b) = \int_0^{+\infty} f(x, b) dx = C$ 时, 对 $I(b)$ 进行求导的结果不成立; 当

$I(b) = \int_0^{+\infty} f(x, b) dx = g(b)$ (其中 $g(b)$ 为含 b 的函数) 时, 对 $I(b)$ 进行求导的结果成立。

浅析 $y'' \pm y = x^{-a}$ 与 $y' \pm y = x^{-a}$ 的特解, 其中 $a \in R$

假设 $y=x^{-a}$, 则有 $y'=ax^{-a-1}$, $y''=a(a-1)x^{-a-2}$, 于是就有

$$\begin{aligned} y'' + y &= \frac{x^2 + a(a-1)}{x^{a+2}}, \quad \text{于是就有 } \lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} \frac{x^2 + a(a-1)}{x^{a+2}} = \lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} \frac{(x-a)^2 + (2x-1)a}{x^{a+2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} \frac{L^2 + (2x-1)(x-L)}{x^{a+2}} = \lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} \frac{L^2 + 2x^2 - 2xL - x + L}{x^{a+2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} \frac{L^2 + 2x^2 - 2xL - x + L}{x^{a+2}} = \lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} x^{-a} \end{aligned}$$

的特解为 $\lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} y = \lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} x^{-a}$ 。同理就有 $\lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} y' \pm y = \lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} x^{-a}$ 的特解为

$\lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} y = \lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} x^{-a}$ 。其中 $a \in R$ 。同理就有 $\lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} y' \pm y = \lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} x^{-a}$ 的特

解为 $\lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} y = \lim_{x \rightarrow a \rightarrow L} x^{-a}$ 。其中 $a \in R$ 。

证明: $\lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-b \tan x} dx = \lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} \frac{1}{b}$, 其中 $b > 0$ 对于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-b \tan x} dx$, 令

$$\tan x = t, \quad \text{则有 } dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \text{有 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-b \tan x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{1+t^2} dt, \quad \text{令 } I(b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{1+t^2} dt,$$

$$\text{则有 } I'(b) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-bt}}{1+t^2} dt, \quad \text{于是就有 } I'(b) + I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-bt} dt = \frac{1}{b},$$

所以就有 $\lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} I(b) = \lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} \frac{1}{b} + C_1 \cos b + C_2 \sin b$, 因为 $\lim_{b \rightarrow \infty} I(b) = 0$,

所以就有 $\lim_{b \rightarrow \infty} C_1 \cos b + C_2 \sin b = 0$, 即 $\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(b+x) = 0$,

其中 $\tan x = \frac{C_1}{C_2}$, 要使 $\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(b+x) = 0$ 恒成立, 则 $C_1^2 + C_2^2 = 0$,

即 $C_1 = C_2 = 0$, 所以 $\lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-b \tan x} dx = \lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} \frac{1}{b}$, 其中 $b > 0$ 。

$$\text{证明: } \lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt^n}}{1+t^n} dt = \lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} \frac{\Gamma(\frac{1}{n})}{n\sqrt[n]{b}}, \quad \text{其中 } b > 0$$

$$\text{设 } I(b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt^n}}{1+t^n} dt, \quad \text{则有 } I'(b) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-bt^n}}{1+t^n} dt, \quad \text{于是就有}$$

$$I(b) - I'(b) = \int_0^{+\infty} e^{-bt^n} dt, \quad \text{令 } bt^n = x^n, \quad \text{则有 } dt = \frac{dx}{\sqrt[n]{b}}, \quad \text{所以就有}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-bt^n} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^n}}{\sqrt[n]{b}} dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{n})}{n\sqrt[n]{b}}, \quad \text{所以 } \lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} I(b) = \lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} \frac{\Gamma(\frac{1}{n})}{n\sqrt[n]{b}} + C e^b,$$

因为 $\lim_{b \rightarrow \infty} I(b) = 0$, 所以就有 $C=0$, 于是就有 $\lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt^n}}{1+t^n} dt = \lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} \frac{\Gamma(\frac{1}{n})}{n\sqrt[n]{b}}$ 。

$$\text{证明: } Si(2a\pi) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2a\pi}$$

$$\text{已知: } \lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-b \tan x} dx = \lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} \sin b Ci(b) - \cos b Si(b) + \frac{\pi}{2} \cos b,$$

所以 $\lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} \sin b Ci(b) - \cos b Si(b) + \frac{\pi}{2} \cos b = \lim_{b \rightarrow 1 \rightarrow L} \frac{1}{b}$, 由于 $\infty - 1 = \infty$, 所以上

式可以等价于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x Ci(x) - \cos x Si(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} \cos x$, 令 $x = 2n\pi$,

$n \in N^+$, 就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} Si(2n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2n\pi}$, 所以就有 $\lim_{x \rightarrow \infty} Si(x) = \frac{\pi}{2}$;

因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 就有 $\exists a \in F$ 使得 $f(a) \approx g(a)$ [1]。所以有

$\exists a \in F$, 使得 $Si(2a\pi) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2a\pi}$; 其中 $a \in N^+$ 。F 为一不确定但存在的区间。

证明: 设 $w(s) = \int_0^{+\infty} \sin^s x \cos^s x e^{-x} dx$, 于是就有

$$w(s) = \frac{s(s-1)}{4s^2+1} w(s-2), \quad \text{其中 } w(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1 \text{ 并且}$$

$$w(1) = \int_0^{+\infty} \sin x \cos x e^{-x} dx = \frac{1}{5}$$

设 $w(s) = \int_0^{+\infty} \sin^s x \cos^s x e^{-x} dx$,

则 $w(s) = -\int_0^{+\infty} \sin^s x \cos^s x d(e^{-x})$

$$= -\sin^s x \cos^s x e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} d(\sin^s x \cos^s x)$$

$$= s \int_0^{+\infty} e^{-x} (\sin^{s-1} x \cos^{s+1} x - \sin^{s+1} x \cos^{s-1} x) dx$$

$$= -s \int_0^{+\infty} (\sin^{s-1} x \cos^{s+1} x - \sin^{s+1} x \cos^{s-1} x) d(e^{-x})$$

$$= -s e^{-x} (\sin^{s-1} x \cos^{s+1} x - \sin^{s+1} x \cos^{s-1} x) \Big|_0^{+\infty}$$

$$+ s \int_0^{+\infty} e^{-x} d(\sin^{s-1} x \cos^{s+1} x - \sin^{s+1} x \cos^{s-1} x)$$

$$= s \int_0^{+\infty} e^{-x} [-2(s+1) \sin^s x \cos^s x + (s-1) \sin^{s-2} x \cos^{s-2} x (\cos^4 x + \sin^4 x)]$$

$$= -2(s+1)s w(s) + s(s-1)w(s-2) - 2s(s-1)w(s)$$

$$= s(s-1)w(s-2) - 4s^2 w(s)$$

所以 $w(s) = \frac{s(s-1)}{4s^2+1} w(s-2)$ 。

$$w(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1,$$

$$w(1) = \int_0^{+\infty} \sin x \cos x e^{-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{10} e^{-x} (2 \cos 2x + \sin 2x) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{5}$$

建立 $\sin(2nx)$ 与 $\sin(x+f(n))$ 的联系

假设 $f(N) = \sin[\frac{2nx}{2^{N-1}} + \frac{(2^{N-1}-1)}{2^N} \pi]$, 可以知道有;

$$1+f(1)=2f^2(2)$$

$$1+f(2)=2f^2(3) \cdots \cdots$$

$$1+f(k-1)=2f^2(k)$$

可以知道 $f(1) = \sin(2nx)$,

$$f(k) = \sin[\frac{2nx}{2^{k-1}} + \frac{(2^{k-1}-1)}{2^k} \pi], \text{ 令 } 2n = 2^{k-1} \text{ 即有 } k = \log_2^{4n},$$

即有 $f(\log_2^{4n}) = \sin[x + \frac{(2n-1)}{4n} \pi]$, 这也就建立起了 $\sin(2nx)$ 与

$\sin(x+f(n))$ 的联系。

结论

本文通过对高等数学的研究, 得出了一些有趣的结果, 供读者参考。

参考文献

[1] 欧建. 变化中的数学 [J]. 教育教学创新, 2024: 118-121.

[2] 吴赣昌. 高等数学: 上册 [M]. 第五版. 北京: 中国人民大学出版社, 2017: 233.