可列集作为桥梁：数学分析入门教学的探讨

魏杰，袁占斌，张伟伟 *
西北工业大学 数学与统计学院，陕西 西安 710129

DOI: 10.61369/ETR.20250023020

摘　　要： 可列集是数学分析课程中的关键概念，在学生从高中数学向大学数学过渡的过程中具有桥梁作用 . 本文围绕可列集的教学展开探讨，结合例题讲解与引导性讨论，帮助学生澄清对“特定规律”的误解，深入理解无限性与可列性的本质 . 为提升教学实效，设计并实施了基于北太天元软件的“可列集可视化实验”，通过构造自然数、有理数等集合并对比实数集的密集性，引导学生直观理解可列与不可列的差异 . 实验融合理论学习与实践操作，激发学习兴趣，提升学生的数学建模与抽象思维能力，为后续学习极限与连续等核心内容奠定基础 .

关 键 词： 数学分析；入门教学；可列集；极限理论；北太天元；数学实验

Countable Sets as a Bridge: An Exploration of the Introductory Teaching of Mathematical Analysis

Wei Jie, Yuan Zhanbin, Zhang Weiwei *
School of Mathematics and Statistics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710129

Abstract： Countable sets are key concepts in the mathematical analysis course and serve as a bridge for students' transition from high – school mathematics to college mathematics. This article focuses on the teaching of countable sets. By combining example explanations with guiding discussions, it helps students clarify misunderstandings about "specific rules" and deeply understand the essence of infinity and countability. To improve teaching effectiveness, a "Visualization Experiment of Countable Sets" based on the Beita Tianyuan software was designed and implemented. By constructing sets such as natural numbers and rational numbers and comparing the density of the set of real numbers, students are guided to intuitively understand the differences between countable and uncountable sets. This experiment integrates theoretical learning with practical operations, stimulates students' interest in learning, and enhances their mathematical modeling and abstract thinking abilities, laying a foundation for subsequent learning of core contents such as limits and continuity.

Keywords： **mathematical analysis; introductory teaching; countable sets; limit theory; beita tianyuan; mathematical experiment**

引言

数学分析课程作为数学专业本科生的一门核心必修课程，不仅奠定了常微分方程、复变函数、实变函数及泛函分析等后续数学专业课程的基础 , 而且常常称为大一学生初步接触数学专业的主要难关 [1,2]。若大一新生仍然采用高中的学习方法来学习数学分析，可能会学习效率低下，甚至失去对未来的大学学习的信心。识别并理解数学分析中的核心概念，如可列集和极限等，对学生掌握课程内容至关重要。这些概念的复杂性不仅是理论学习方面的挑战，也是学生适应大学数学思维方式的重要转折点。本文将探讨教师如何通过例题讲解、引导讨论 , 帮助学生深入理解这些基础但关键的数学概念 , 从而顺利过渡到数学分析的深入学习 [1]。

一、教学案例分析

以复旦大学第三版《数学分析》教材为例，该教材以“集合与映射”为首章，旨在以高中数学知识为基础，引领学生进入大学数学分析的学习。尽管该章节的大部分内容对于刚入大学的新生来说并不完全陌生，但集合中的无限集和可列集的概念却是学生所面临的第一个与高中数学截然不同、难以理解的挑战。教师应抓住此机会，引导学生通过讨论可列集的概念，深化对数学分

基金项目：西北工业大学数学与统计学院教育教学改革研究项目；西北工业大学伦敦玛丽女王大学工程学院“课程思政”示范课程项目；西北工业大学教育教学改革研究项目 .

作者简介：
魏杰（1987-），女，河南，博士，助理研究员，科学与工程计算，Email: weijie@nwpu.edu.cn.
袁占斌（1981-），男，青海，博士，副教授，科学与工程计算，Email: yzzzb@nwpu.edu.cn.
张伟伟（1986-），女，河南，博士，副教授，科学与工程中偏微分方程数值解，Email: wwzhang@nwpu.edu.cn

析中无穷、极限等概念的理解 [2]。

下文给出有限集、无限集及可列集的定义 [3,4]：

定义1 若集合 S由 n个元素组成，这里 n是确定的非负整数，则称集合 S为有限集。

定义2不是有限集的集合称为无限集。

定义3如果一个无限集中的元素可以按照某种规律排成一个序列，或者说，这个集合可表示为$\{a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots\}$，则称其为可列集。

对于这些定义，学生通常能较易理解有限集，因为在高中阶段接触的大多数集合均为有限集。无限集作为“非有限集的集合”的概念也较为容易被接受。 然而，可列集的定义往往令许多学生感到困惑，尤其是“元素能按照特定规律排成序列”这一句。

可列集，亦称可数集，是一类特殊的无限集，能够与自然数集一一对应。 在可列集的定义中，“特定规律”并非仅限于基础的算术运算。 学生往往受高中数学思维的影响，误以为这里的规律类似于高中数学的数列通项公式。 这种误解通常会导致学生对可列集的理解产生局限。

可列集的概念在大一新生理解极限方面起着至关重要的作用。首先，它作为学生接触的第一个无限集概念，构建了从直观到抽象理论的桥梁，使学生能够在直观理解的基础上，逐步适应数学分析中对无限性的严格处理。 其次，学习可列集有助于学生对序列、函数极限等后续数学分析概念的理解，为掌握更复杂的极限理论奠定了基础。 通过探讨可列集，学生不仅能够理解无限集合可以有序排列的可能性，还能意识到数学概念的严谨性和深刻性。因此，深入讲解可列集不仅是教授数学分析的关键步骤，也是激发学生数学学习兴趣和思维能力的有效途径 [3]。

下面给出可列集相关的一个例题和两个讨论。

例1 有理数集 Q是可列集 [4]。

证明 由于区间$(-\infty,+\infty)$可以表示为可列个区间$(n,n+1]$的并，我们只需证明区间（0,1]中的有理数是可列集即可。

由于区间（0,1]中的有理数可惟一地表示为既约分数$\frac{p}{q}$，其中$p\in N^+,q\in N^+,p\le q$并且p,q互素。 我们按下列方式排列这些有理数：

分母 p=1的既约分数只有一个：$x_{11}=1$；

分母 p=2的既约分数也只有一个：$x_{21}=\frac{1}{2}$；

分母 p=3的既约分数有两个：$x_{31}=\frac{1}{3},x_{32}=\frac{2}{3}$；

分母 p=4的既约分数有两个：$x_{41}=\frac{1}{4},x_{42}=\frac{3}{4}$；

……

一般地，分母 $p=n$的既约分数至多不超过 n-1,可将它们记为$x_{n1},x_{n2},\cdots,x_{n,k(n)}$，其中$k(n)\le n$。

于是区间（0,1]中的有理数全体可以排成

$$x_{11},x_{21},x_{31},x_{32},\cdots x_{n1},x_{n2},\cdots,x_{n,k(n)},\cdots$$

这就证明了有理数集 Q是可列集。

讨论1 实数集 R是否为可列集?

在此章节提出该讨论旨在引导学生理解并探讨可列集与无限集等相关概念。 可列集定义为那些元素能与自然数集一一对应的无限集。 然而，并非所有无限集均为可列集。 实数集 R，由全体有理数与全体无理数构成。 已知有理数集是一个可列集，那么无理数集能否构成可列集呢？无理数填补了有理数在实数线上留下的所有空隙，是否可以找出某种规则，能够将无理数排列成序列？在介绍闭区间套定理的第二章节之后，将证明实数集 R不构成可列集 [4]。

讨论2 自然数中所有素数构成的集合是否为可列集？如何描述其排列规则？

素数定义为大于1的自然数，除了1和它本身外，不被其他自然数整除的数。

关于素数的研究历史悠久，其中哥德巴赫猜想是最著名的未解之谜之一，它假设每一个大于2的偶数都可以写成两个素数之和。尽管陈景润对此猜想做出了突出贡献，通过他的工作我们对素数的理解有了显著提高，尤其是他证明了“1+2”的形式，即每个充分大的偶数都可以表示为一个素数和一个至多有两个素数乘积的形式，这对研究素数的分布提供了重要的见解 [5,6]。 然而，哥德巴赫猜想的完全证明依然悬而未决，这也彰显了素数结构之谜的深度和复杂性。

所有素数构成的集合是否可列？从理论上讲，该集合为无限集，且包含于有理数集，似乎应当是可列的。 但具体如何描述其排列规则仍是一个挑战。 虽然人们极其渴望发现素数的规律，素数的确定性和它们在数论中的核心地位意味着这些规律的存在，但至今，尚未发现一个能够仅通过数学公式生成素数的方法。 这种情况加深了数学界对可列集可能存在着一些我们尚未能完全理解或描述的规律的认识 [5]。

上述例题和讨论中，有理数集 Q是可列集的证明，不仅揭示了有理数集的结构特性，也展示了无限集合的一个具体应用。 学生可以更清晰地理解无限集合的可列性，并激发对无限概念深层次探索的兴趣。 对于实数集是否为可列集的讨论，不仅加深了学生对无限集合与可列集的理解，也促进了他们对实数稠密性的初步认识。 探讨自然数中所有素数的集合则进一步引导学生思考数学中的无限性质及其与数学结构的关系。通过对素数的讨论，学生能够认识到数学分析中无限概念的丰富性和复杂性 [6]。

二、数学实验案例分析

北太天元是一款由北太振寰（重庆）科技有限公司自主研发的国产通用型科学计算软件，在北京大学数学科学学院、大数据分析与应用技术国家工程实验室及北京大学重庆大数据研究院的指导与支持下推出。 该软件拥有完全自主的解释器和编程语言，突破了科学计算领域的关键技术瓶颈。 现已有超过300所高校和100余家企事业单位使用北太天元，用户数量超过3万人。其良好的兼容性也使得用户能够在较低学习成本下平稳过渡，实现从国外主流科学计算软件到国产平台的迁移。

随着数学教学改革的不断深入，数学实验逐渐成为促进学生理解数学分析基本概念和提升综合素养的重要手段。 数学分析课程由于其抽象性强、理论体系严谨，常令初学者感到困难和距离感。 而数学实验恰恰为学生提供了一个将抽象理论与直观理解、

实际应用相结合的桥梁。任玉杰等[8]从教学模式的层面建议将数学实验纳入数学分析教学全过程。他指出，数学实验特别适用于解决数学分析中抽象难懂的内容，通过图形可视化与动态演示，使这些理论内容变得具体、生动，极大地促进了学生对分析概念的掌握

为帮助学生们深入理解“可列集”这一概念，我们可以设计一个基于北太天元软化平台的数学实验，旨在通过编程和数学分析，全面揭示可列集的定义、特性，并引导学生思考数学分析中涉及的相关理论。实验将通过引导学生观察、验证和理解可列集的构造，逐步过渡到抽象的数学思维，并且结合理论与实践[7]。

实验名称：基于北太天元软件的可列集可视化实验

实验目标：

帮助学生掌握“可列集”这一核心概念，理解其与自然数集合的一一对应关系；

引导学生了解可列集的特性以及与不可列集（如实数集）之间的区别；

培养学生使用北太天元软件构建、分析集合的能力，强化数学建模与可视化分析的综合素养；

在实验过程中训练学生的抽象思维与逻辑推理能力，提升其对数学分析基础概念的理解深度。

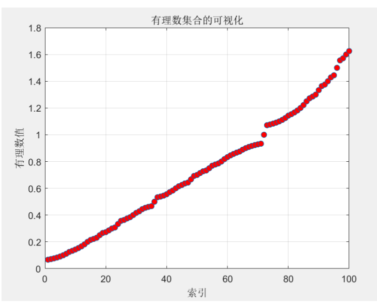
实验平台：国产数值计算软件北太天元

适用对象：数学分析入门阶段的本科学生

知识准备：集合与映射、自然数、有理数、小数展开的初步知识

实验步骤：

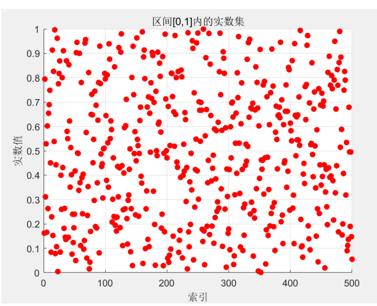
构建简单的可列集并可视化。使用北太天元生成自然数集合 N = {1，2，3，…}，可选前100项进行展示，并可视化，帮助学生理解自然数集的顺序性及其与自然数的对应；



>图1 北太天元软件平台实现有理数集合的可视化

从自然数到其他可列集的构造，探讨其他可列集（比如偶数集、等比数列或其他任一有通项公式的集合），学生可以理解这些集合尽管形式多样，但都可与自然数一一对应，因此是可列集；

探索有理数集的可列性，有理数集是一个较为复杂但经典的可列集，它包含所有的分数。实现经典的有理数二维排列法，展示“路径遍历有理数”的过程，强调其有序性，证明其可列性。学生通过编程能够看到有理数集是如何通过特定的规律排列成可列集的。



>图2 北太天元软件平台实现部分实数集的可视化

对比可列集与不可列集：尝试生成一个不可列集的部分元素，例如随机生成区间 [0,1] 内的实数，使用点图对比自然数和实数样本的空间分布特性；观察实数的密集性与无序性，理解其不可列性，必要时可引入康托尔对角线法作为理论支撑[8]。

通过本实验，学生不仅在编程实践中掌握了可列集的定义及其与自然数集合之间的一一对应关系，还借助北太天元软件的可视化功能，直观理解了可列集与不可列集在结构特征上的本质差异。实验过程中，学生从自然数、有理数等典型可列集的构造入手，逐步过渡到对实数集不可列性的感性认识与理性分析，增强了对集合论核心概念的理解。整体而言，该实验有效融合了理论学习与动手操作，既拓展了学生对数学分析基础知识的理解深度，也提升了其抽象思维、建模意识与数学严谨性，为后续课程的学习打下了良好的基础[9]。

三、结论

一个良好的开始是成功的关键。在数学分析课程的起始阶段，“可列集”作为学生首次系统接触无限集合的重要概念，具有奠基性意义，却常因其抽象性而被忽视。通过系统的讲解和师生间的充分讨论，学生能够深刻理解无限性与可列性的本质差异，为后续学习数列极限、函数极限等关键内容奠定坚实的理论基础。在此基础上，设计并完成“可列集可视化实验”更进一步强化了学生对相关概念的理解。借助数学实验，学生不仅通过动手构造与程序可视化加深了对集合结构的直观认识，也在实践中体验了数学的逻辑性与应用性[10]。

这种以“理论＋实验＋讨论”三位一体的教学方式，有效激发了学生的学习兴趣，培养了其数学表达与合作能力。更为课堂营造出严谨而活跃、探索而互助的学习氛围，使学生在数学分析课程的起步阶段便树立起良好的学习信心与方法意识，对其整个大学阶段的数学学习都将产生积极而深远的影响。

致谢：本研究受到2025年度西北工业大学数学与统计学院教育教学改革研究项目资助，2023年度西北工业大学玛丽学院“课程思政”示范课程建设项目和2023年度西北工业大学教育教学改革研究项目资助，同时感谢评委提出的宝贵建议和意见。

参考文献

[1]焦建民.数学分析课程入门教学的探讨[J].大学教育，2013,(16):109-110.
[2]刘素红.如何让数学专业大一新生顺利进入《数学分析》的学习[J].大学数学，2016,32(03):71-76.
[3]华东师范大学数学系.数学分析（第三版）[M].北京：高等教育出版社，2001.
[4]复旦大学数学系.数学分析（第三版）[M].北京：高等教育出版社，2019.[2]
[5]陈景润.大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和[J].中国科学，1973(02):111-128.
[6]郭金海.1950—1970年代中国数学家的哥德巴赫猜想研究[J].科学，2022,74(06):59-62+69.
[7]https://bda.pku.edu.cn/index.htm.
[8]任玉杰.高校数学教学模式改革与数学实验[J].大学数学，2004,(01):19-23.
[9]王雪琴，魏艳红，成荣强.数学分析概念教学中的数学语言艺术研究[J].渭南师范学院学报，2017,32(14):49-54.DOI:10.15924/j.cnki.1009-5128.2017.14.007.
[10]唐秋林.关于数学分析入门教学的几点思考[J].牡丹江大学学报，2010,19(05):151-153.DOI:10.15907/j.cnki.23-1450.2010.05.038.

 |