

实分析中函数惟一性定理和零点的孤立性

张知沛

电子科技大学中山学院, 广东 中山 528402

DOI:10.61369/CEIP.2025020027

摘要： 在探讨实变函数的理论框架中，常见于解析函数的惟一性原理和零点的独立性通常在实数分析领域并不适用。本文探讨了实分析中的函数惟一性定理及其与零点孤立性的关系。首先，定义了函数惟一性定理的基本概念，并通过实例说明其在实际应用中的重要性。接着，分析了零点的孤立性，对比了孤立零点与非孤立零点的性质，讨论了其在微分方程和数值分析中的应用。通过引入一些经典结果，如 Bolzano–Weierstrass 定理和 Cantor 定理，深入探讨了这些定理在函数惟一性及零点分析中的作用。最后，结合具体例子，展示了如何利用这些理论工具解决实际问题，并提出了未来研究的可能方向。

关键词： 复解析函数；实解析函数；惟一性；孤立性

The isolation of the Functional Uniqueness Theorem and the Zero Points in the Real Analysis

Zhang Zhipai

Zhongshan College, University of Electronic Science and Technology, Zhongshan, Guangdong 528402

Abstract： In the theoretical framework of discussing real variable functions, the unique principle of analytical functions common in analytic functions and the independence of zero points are usually not applicable in the field of real number analysis. In this paper we explore the functional uniqueness theorem in real analysis and its relation to zero isolation. First, we define the basic concept of function uniqueness theorem and illustrate its importance in practical applications. Next, we analyze the isolation of zero, compare the properties of isolated zero, and discuss its application in differential equations and numerical analysis. By introducing some classical results, such as Bolzano–Weierstrass theorem and Cantor theorem, we deeply explore the role of these theorems in function uniqueness and zero–point analysis. Finally, combined with concrete examples, we show how to use these theoretical tools to solve practical problems and suggest possible directions for future research.

Keywords： complex analytic function; real analytic function; uniqueness; isolation

引言

实分析是数学的重要分支，研究实数系统及相关函数的性质。函数惟一性定理和零点特性在数学问题中至关重要，为分析函数行为提供理论支持，尤其在求解非线性方程和优化问题中应用广泛。这一理论不仅推动数学发展，也为工程、物理、计算机科学等领域提供重要工具。孤立零点指在特定区域内仅存在一个零点，其在数值分析和计算方法中具有重要意义。研究孤立零点可提高数值求解效率，增强算法收敛性和稳定性，同时为理解函数整体形态提供线索。随着科技进步，对函数惟一性定理和零点孤立性的深入研究为解决复杂实际问题提供了新思路。例如，在经济学中，市场均衡模型涉及非线性方程求解，这些理论帮助经济学家更准确预测市场行为；在工程领域，控制系统设计需考虑函数惟一性与零点分布，这对系统稳定性和性能优化至关重要。

一、函数惟一性定理的理论基础

（一）实分析中的基本概念和定理

实分析是数学分析的一个重要分支，主要研究实数集及其上的函数性质。基本概念包括实数的结构、极限、连续性、导数、积分等。在实分析中，实数被视为完备的有序集合，任何有界单

调序列必定收敛于其上界，这一特性是实数系统的重要基础^[1]。

（二）关键公式与推导

在实分析中，函数的惟一性定理通常与一些关键公式和推导紧密相关。这些公式和推导不仅为理论提供了基础，也为实际应用奠定了重要依据。

设考虑一个连续函数 $(f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R})$ ，我们定义 (f) 的

零点为满足 $f(x)=0$ 的点 $x \in [a,b]$ 。根据惟一性定理, 如果 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 并且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 那么根据介值定理, 存在至少一个 $c \in (a,b)$ 使得 $f(c)=0$ 。这一点为进一步分析函数的行为提供了基础。

进一步考虑函数的导数 f' , 当 f 的导数在某个点 c 不为零时, 依据罗尔定理, f 在该点附近的行为是单调的。这意味着如果 $f(c)=0$, 则 c 的邻域中不会存在其他零点。这一性质可以通过导数的符号来加以说明。

对于函数的惟一性, 可以引入一个重要的公式, 假设 f 为可微函数, 且在区间 $[a,b]$ 上满足 $f(a)<0$ 和 $f(b)>0$ 。根据拉格朗日中值定理, 存在 $c \in (a,b)$ 使得 $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$]

由于 $f(a)<0$ 和 $f(b)>0$, 可得 $f'(c)>0$ 。这表明在 c 附近, 函数 f 是单调递增的。因此, c 是唯一的零点。

对于零点的孤立性, 如果存在 c 使得 $f(c)=0$, 且 $f'(c) \neq 0$, 则在 c 的某个邻域内, f 不会再有其他零点。可以利用极限的概念来进一步推导, 定义 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq 0$ 这意味着存在 $\delta > 0$, 使得对于任意 $x \in (c-\delta, c+\delta)$, 都有 $f(x) \neq 0$ 。因此, c 是孤立零点。

这些公式和推导为研究函数的惟一性提供了坚实的理论基础, 揭示了函数行为的深刻结构, 进而影响到实分析中的进一步研究和实际应用。通过这些关键公式, 可以更深入地理解函数的性质及其在不同情境下的表现^[2]。

二、零点的孤立性及其性质

(一) 零点的定义与分类

在实分析中, 零点通常被定义为某个函数在特定点处取值为零的点。设有一个实值函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 如果存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x_0)=0$, 则称 x_0 为函数 f 的零点。零点的存在性在数学分析及其应用中具有重要意义, 尤其是在数值分析、优化和微分方程等领域^[3]。

根据零点的性质, 可以将其分类为以下几种类型:

- 孤立零点: 若零点 x_0 在某个邻域内没有其他零点^[4], 则称 x_0 为孤立零点。
- 复零点: 当某个零点在函数的多重根中出现时, 该零点称为复零点。
- 简单零点: 若零点 x_0 的导数 $f'(x_0) \neq 0$, 则称其为简单零点。
- 复合零点: 若在某个区间内存在多个零点且这些零点彼此之间相互影响, 形成复杂的交互关系, 则称其为复合零点。
- 端点零点: 在某些情况下, 零点可能出现在定义域的端点。

(二) 零点孤立性的证明方法

零点孤立性的证明方法主要依赖于拓扑和分析的结合, 常用的工具包括不动点定理、连续性和局部性质的分析^[5]。

定理1 设函数 $f(x)$ 的导函数列 $\{f^{(n)}(x)\}_{n=1, 2, 3, \dots}$ 在 x_0 的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) 中一致有界则 $f(x)$ 在 $(x_0 -$

$\delta, x_0 + \delta)$ 内也是解析函数。

证明由于 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内有各阶导数, 并且 $f^{(n)}(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内一致有界, 因此 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内各个点处能展成幂级数, 故 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内是解析的。

例如, 函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(2nx)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数, 但不解析。

定理2 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内解析, $f(x_0)=0$, $x_0 \in (a,b)$, 那么称 x_0 是实解析函数 $f(x)$ 的零点。

定理3 设 $f(x)$ 在 $|x - x_0| < R$ 内解析, $f(x_0)=0$, 且 $f(x)$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内不恒为零, 则必有 x_0 的一个充分小的邻域 $(x_0 - r, x_0 + r)$ ($0 < r < R$), 使得 $f(x)$ 在其中无异于 x_0 的零点。

证明由于 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有零点, 假设为 m 阶, 那么由 m 阶零点定义知 $f(x_0)=f'(x_0)=\dots=f^{(m-1)}(x_0)=0$, 而 $f^{(m)}(x_0) \neq 0$, 故

$$f(x) = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1} + \dots = (x - x_0)^m \phi(x)$$

而 $\phi(x)$ 在 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 内显然解析, 连续, 且 $\phi(x_0) \neq 0$ 。那么存在 $r > 0$, 当 $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ 时 $\phi(x) \neq 0$, 故零点是孤立的。

三、应用实例与讨论

(一) 惟一性定理在具体函数中的应用

在实分析中, 函数惟一性定理对于理解函数行为具有重要意义。该定理的应用不仅限于理论分析, 还能在具体函数的研究中展现其强大的实用性^[6]。

例如, 设 $f(x)=x^3-3x+2$ 。通过计算该函数的导数 $f'(x)=3x^2-3$, 设定 $f'(x)=0$, 得到 $(x=1)$ 和 $(x=-1)$ 。这两个点是 f 的临界点。利用惟一性定理, 可以推断出在这些点附近的函数值变化, 从而确定 f 在这些点的局部极值特性。

进一步考虑 f 的零点问题。通过牛顿迭代法寻找 $f(x)=0$ 的解, 可以设定初始值并逐步逼近。假设初始值选择在 $(1,2)$ 之间, 应用惟一性定理可以确认该区间内存在唯一的零点。具体的计算显示, 在 $(x \approx 1.4)$ 附近, 函数值逐渐趋近于零, 表明存在唯一解。

以上实例展示了惟一性定理在具体函数分析中的应用, 强调了其在确定函数性质和解决实际问题中的价值。这种定理不仅提供了理论支持, 也为数值方法和计算提供了坚实基础。未来的研究可以集中在更复杂函数的惟一性分析及其在多维空间中的推广, 期待在更广泛的应用领域中发挥作用^[7]。

(二) 零点孤立性在实际问题中的验证

在实际问题中, 零点的孤立性常常被用于分析非线性方程的解的性质。以物理学中的平衡问题为例, 考虑一个简谐振动模型, 系统的平衡点对应于系统能量最小的状态。通过构造能量函数并分析其零点, 可以确定平衡点的孤立性^[8]。例如, 设能量函数为 $E(x)=\frac{1}{2}kx^2-U(x)$, 其中 $U(x)$ 为势能函数。在能量最小的点 (x_0) 处, 满足 $E'(x_0)=0$ 且 $E''(x_0)>0$, 则 (x_0)

为孤立零点。

在生物数学模型中，某些种群模型的稳定点也表现出零点的孤立性。考虑洛特卡-沃尔泰拉捕食者-猎物模型，种群动态方程中存在一个平衡点 $((x^*, y^*))$ ，其对应的种群数量为零。通过分析雅可比矩阵的特征值，可以判断平衡点的稳定性和孤立性。若特征值均为负，则平衡点为孤立吸引点，表示种群在此点附近的行为趋于稳定^[9]。

在工程领域，零点的孤立性也被广泛应用于控制系统的设计。以PID控制器为例，控制系统的传递函数可以表示为 $G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$ ，其中 (K) 为增益， $(a>0)$ 。系统的零点和极点分布影响系统的动态响应。通过调整参数 (K) 和 (a) ，可以确保系统的零点为孤立，从而提高系统的稳定性和响应速度^[10]。

以上实例展示了零点孤立性在多领域中的重要性，通过分析

零点的存在条件及其性质，能够更好地理解和解决实际问题。

四、结束语

函数唯一性定理和零点的孤立性不仅是理论研究的重点，更在多个应用领域中展现出广泛的意义。深入探讨这些主题，能够推动相关学科的进步，并为未来的研究提供基础。在函数唯一性定理与零点孤立性研究的基础上，未来的研究方向可以从多个角度进行拓展。首先，考虑将函数唯一性定理与更复杂的数学结构相结合，例如拓扑空间或代数结构，探索其在更一般情况下的适用性。这种跨领域的研究可能会揭示新的数学现象，并提供更深层次的理论支持。

参考文献

- [1] 徐佳文, 朱莉萨. 泰勒公式在实分析上的探究与应用 [J]. 吉林工程技术师范学院学报, 2020, (07): 91-94.
- [2] 朱剑峰, 李鸿萍. 复变函数与高等数学的对比教学法 [J]. 科技创新导报, 2018, (02): 214-216.
- [3] 刘畅, 盛声凯. 现代艺术平面设计中的“虚”与“实”分析 [J]. 现代装饰(理论), 2016, (01): 147.
- [4] 林植林. 实分析中关于 Lipschitz 条件的一个充要条件 [J]. 大学数学, 2014, (04): 65-67.
- [5] 胡绍宗. 实分析教学杂记 [J]. 大学数学, 2014, (03): 107-110.
- [6] 胡绍宗. 实分析中三个概念的教学处理 [J]. 阜阳师范学院学报(自然科学版), 2013, (02): 90-92.
- [7] 盖涵保, 姜晓鹏. 实分析中函数唯一性定理和零点的孤立性 [J]. 齐齐哈尔大学学报(自然科学版), 2013, (03): 91-94.
- [8] 贾金平, 张凡娣, 代丽芳. 实分析中几种收敛性之间的关系 [J]. 咸阳师范学院学报, 2011, (06): 4-5.
- [9] 学办. 易门抓实分析检查阶段各项工作 [N]. 玉溪日报, 2009-12-16.
- [10] 通讯员邓学品. 弥勒“五步曲”抓实分析检查 [N]. 红河日报, 2009-06-10.