

参数估计对二项分布 CUSUM 控制图的性能影响分析

苏鑫越¹, 杨薇², 张久军^{1*}

1. 辽宁大学 数学与统计学院, 辽宁 沈阳 10036

2. 鞍山师范学院 数学院, 辽宁 鞍山 114007

DOI:10.61369/ASDS.2025050020

摘 要 : 传统控制图大都是基于参数已知的假设, 当参数未知时需要通过历史数据来进行估计, 但估计的误差会对控制图的性能产生一定影响. 基于此, 本文考虑了参数估计对检测二项分布的 CUSUM 控制图的性能影响, 通过蒙特卡洛模拟方法, 得到在不同的历史样本数量条件下的平均运行长度. 考查了受控与失控下控制图的性能表现, 并通过调整控制线得到给定的平均运行长度。

关 键 词 : CUSUM 控制图; 样本量; 二项分布; 参数估计

Analysis of the Influence of Parameter Estimation on the Performance of CUSUM Control Charts for Binomial Distribution

Su Xinyue¹, Yang Wei², Zhang Jiujun^{1*}

1.School of Mathematics and Statistics, Liaoning University, Shenyang, Liaoning 110036

2.School of Mathematics, Anshan Normal University, Anshan, Liaoning 114007

Abstract : Traditional control charts are typically based on the assumption of known parameters. When these parameters are unknown, historical data are required for estimation. However, estimation errors can affect the performance of the control charts. In view of this, this paper investigates the impact of parameter estimation on the performance of a Cumulative Sum (CUSUM) control chart for monitoring binomially distributed data. Using the Monte Carlo simulation method, the average run length under different numbers of historical samples is obtained. The performance of the control chart under both in-control and out-of-control conditions is evaluated, and the control limits are adjusted to achieve a specified average run length.

Keywords : cumulative sum control chart; sample size; binomial distribution; parameter estimation

引言

控制图作为统计过程控制 (Statistical Process Control, SPC) 的一种重要工具, 已经在制造业中得到广泛应用。1924 年, Shewhart^[1] 提出了 Shewhart 控制图, 其易于实施且对过程参数大漂移的检测比较敏感。1954 年, Page^[2] 提出了累积和 (cumulative sum, CUSUM) 控制图。1959 年, Roberts^[3] 提出了指数加权移动平均 (exponentially weighted moving average, EWMA) 控制图。CUSUM 控制图和 EWMA 控制图对于检测过程参数的小漂移十分有效。

在 SPC 中, 通过对生产过程中的缺陷数或不合格品率进行监控, 可及时识别过程参数漂移, 提高产品的质量。为了监控不合格品数的波动, Lucas^[4] 详细介绍了二项分布 CUSUM 控制图的原理和设计过程。Gan^[5] 进一步提出了二项分布 CUSUM 控制图优化参数的具体方法。理论上, 检测漂移的控制限需由过程参数确定, 但在实际中, 受控过程的参数一般都是未知的, 需要通过受控状态下的样本数据对参数进行准确的估计, 构造控制限, 以使控制图的统计性能可靠。在 SPC 中, 这个过程称为阶段 I, 对生产过程进行在线监控的过程称为阶段 II。

参数估计对控制图的性能有重要影响, Jensen^[6] 和 Psarakis^[7] 对这一领域进行了详细综述。Does 等^[8] 在 I 阶段中对比了多种估计量对 CUSUM 控制图性能的影响, 为阶段 II 提供更优的参数估计策略。Tao^[9] 在阶段 I 用 8 个估计量在 6 种污染环境下估计过程标准差, 并分析了不同估计量对控制图运行长度分布。Yi 和 Qiu^[10] 提出了自适应 CUSUM 控制图并通过递归更新参数估计, 实现控制限的修正调整, 使控制图 II 阶段有效监控过程异常。因此, 本文在已有研究的基础上, 系统分析参数估计对二项分布的 CUSUM 控制图性能的影响, 同时对控制限进行修正, 以提升控制图的监控性能。

基金项目: 辽宁省教育厅基金基本项目 (LNYJG2024012); 辽宁省研究生教学改革研究项目 (JYTMS20230768)。

作者简介:

苏鑫越 (2002—), 女, 河南安阳人, 辽宁大学数学与统计学院在读硕士生, 研究方向: 质量控制;

杨薇 (1983—), 女, 辽宁鞍山人, 鞍山师范学院副教授, 研究方向: 质量控制。

通讯作者: 张久军 (1978—), 男, 辽宁兴城人, 辽宁大学数学与统计学院教授, 博士, 博士生导师, 研究方向: 质量控制, 邮箱: zjjly790816@163.com。

一、基本原理

在 SPC 中, 不合格品的数量 X 服从参数为 n 和 p 的二项分布, 其中 n 为进行独立试验的总数, p 为不合格品率。即 $X \sim b(n, p)$ (其中 $p \in (0, 1)$)。当不合格率在可接受的范围内波动时, 认为该过程是受控的。反之, 若不合格率超出可接受的范围, 即不合格品数发生较大波动, 则认为过程是失控的。

假设过程处于受控状态, 则

$$P(X = x; p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

均值为 $E(X) = np$, 方差为 $Var(X) = np(1-p)$ 。则 X/n 的均值和方差分别为 $E[X/n] = p$, $Var[X/n] = \frac{p(1-p)}{n}$ 。

受控状态下 $p = p_0$ 。失控状态下 $p = p_1$, $p_1 = p_0 + d\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$, 其中 d 为漂移幅度, $d = \delta\sqrt{\frac{np_0}{1-p_0}}$ 。 $d > 0$ 意味着不合格率增加, 产品质量的下降, 生产过程能力需要提高。本文设 $d \in (0, 3]$ 。

二、CUSUM 控制图设计

(一) 参数 p 已知

由于在实际生产中, 管理者更注重不合格率 p 增加所带来的损失, 因此本文研究用于监测参数 p 向上漂移的单边 CUSUM 控制图。其监测统计量为

$$C_t^+ = \max(0, C_{t-1}^+ + X_t - k) \quad t = 1, 2, \dots$$

其中 k 为参考值。初始值 $C_0^+ = 0$ 。控制限为 h , 本文在蒙特卡洛模拟中应用二分查找法计算得到 h 。若 $C_t^+ > h$, 则表明过程失控, 发出报警信号。参数 k 的计算过程如下:

利用二项分布的分布列构造序贯概率比检验 (SPTR)。令原假设为 $H_0: p = p_0$, 备择假设为 $H_1: p = p_1$ 其中, $p_1 > p_0$ 。似然比定义为

$$\Lambda_t = \frac{\prod_{i=1}^t P(X = x_i; p_0)}{\prod_{i=1}^t P(X = x_i; p_1)} \quad t = 1, 2, \dots$$

似然比取对数, 对于二项分布 $b(n, p)$, $\ln(\Lambda_t)$ 可表示为:

$$\ln(\Lambda_t) = \sum_{i=1}^t (X_i - k) = \ln(\Lambda_{t-1}) + X_t - k$$

则

$$k = \frac{n \ln((1-p_0)/(1-p_1))}{\ln((1-p_0)/(1-p_1)) - \ln(p_0/p_1)}$$

(二) 参数 p 未知

参数 p 未知时, 应进行 I 阶段研究, 以估计受控状态下的参数 p 。极大似然估计值为

$$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n}$$

这里 $\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$, m 为估计参数时所需样本量。 k 由估计值 $\hat{p}$ 确定, $\hat{k} = \frac{n \ln((1-\hat{p}_0)/(1-\hat{p}_1))}{\ln((1-\hat{p}_0)/(1-\hat{p}_1)) - \ln(\hat{p}_0/\hat{p}_1)}$ 。这意味着对指定的 ARL_0 , 不同的 $\hat{p}$ 对应不同的 $\hat{k}$ 。

三、CUSUM 控制图的性能分析

平均运行长度 (Average Run Length, ARL) 是监控控制图中常用的性能评估指标之一, 表示绘制控制图统计量直至发出报警信号所需的期望样本数。受控平均运行长度记为 ARL_0 , 失控平均运行长度记为 ARL_1 。运行长度的标准差记为 $SDRL$ 。本文运用蒙特卡罗模拟方法, 分别固定参数 n 和 p , 探究 I 阶段样本量对 CUSUM 控制图性能的影响。预先指定 $ARL_0 = 370$ 。

(一) 参数 n 固定时, 控制图的性能分析

本节考虑 I 阶段样本量对具有固定参数 n 的 CUSUM 控制图性能的影响。不失一般性, 考虑样本量 $m = \{100, 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000\}$, 参数 $n = 10$, $p = \{0.01, 0.05, 0.1\}$ 。参数已知时 CUSUM 控制图的 $h = \{4.81, 8.78, 10.41\}$, 使得 $ARL_0 = 370$ 。

表 1 参数未知条件下二项分布 $b(10, p)$ 的 CUSUM 控制图在不同 I 阶段参考样本下的运行长度分布 ($p_0 = 0.01, h = 4.81; p_0 = 0.05, h = 8.78; p_0 = 0.1, h = 10.41$)

p_0		0.01					0.05					0.1				
m	δ	ARL	SDRL	10th	50th	90th	ARL	SDRL	10th	50th	90th	ARL	SDRL	10th	50th	90th
100	0	666.6	1206.5	60	247	1599	740.7	1359.4	50	224	1873	721.2	1334.3	48	249	1717
	0.2	293.4	555.8	42	130	630	147.1	251.4	28	78	305	93.7	152.6	22	56	187
	0.4	152	235.6	32	88	315	58.5	59.1	19	43	110	35.6	28.2	14	29	64
	0.6	98.9	119.8	26	65	198	35.6	25.4	15	29	62	21.8	11.6	10	19	36
500	0	419.5	493.6	69	262	939	423.0	519.7	61	255	963	428.1	529.3	56	257	980
	1	199.4	199.5	45	137	424	107.9	96	30	80	215	72.8	58.4	23	56	142
	2	120.4	104.1	34	91	240	52.4	34.9	20	43	96	33.5	19.4	14	29	57
	3	84.3	63.7	27	67	160	33.9	18.6	15	30	58	21.3	10.1	11	19	35

1000	0	396.4	432.8	67	262	875	386.9	419.2	62	256	868	402.2	437.4	58	259	909
	1	193	177.6	45	141	406	103.1	84.3	30	79	204	72.2	54.7	23	57	141
	2	115.7	91.6	34	90	231	51.2	32.4	20	43	92	33.1	18.7	14	29	57
	3	82.5	59.1	27	67	157	33.7	18.1	15	30	57	21.2	10	11	19	34
1500	0	390.7	396.9	70	271	857.1	383.3	392.6	62	260	853	387.3	397.4	60	263	876
	1	188.1	162.5	46	139	392	101.4	78.4	30	79	203	70.4	50.9	23	56	137
	2	117.1	90.7	35	92	228	51.3	32.3	20	43	92	33.2	18.5	15	29	57
	3	82.1	58.2	27	66	157	33.6	18.2	15	30	57	21.2	10	11	19	34
2000	0	377.1	373.1	68	263	831	375.6	365.7	65	262	825	376.5	377.1	60	260	853
	1	187.5	159.6	47	140	391	101.5	78.1	30	79	202	70.5	52.3	23	55	137
	2	117.6	91.2	35	92	233	50.8	31.4	20	43	91	32.8	17.8	15	29	56
	3	80.8	56	27	66	152	33.2	17.4	15	29	56	21.3	10	11	19	34
2500	0	375.8	357.6	69	266	827	374.3	368.7	63	255	837	376.3	375.6	59	260	836
	1	186.8	158.9	46	140	391	100.6	77.6	30	78	199	69.9	50.8	23	56	137
	2	115.5	89.4	46	140	391	51.4	31.9	20	44	92	32.8	18.2	14	29	57
	3	81.1	57.1	27	66	153	33.3	17.9	15	30	57	21.3	9.9	11	19	34
3000	0	373	355.3	70	263	822	373.7	359.7	64	263	814	374.4	368.7	61	263	827
	1	184.5	158.1	45	137	386	101.1	77.3	31	79	202	70	50.3	23	56	134
	2	115.4	88.6	34	91	229	51	31.9	20	43	93	33.1	18.2	15	29	57
	3	81.5	57.1	27	66	154	33.6	17.9	15	30	57	21.1	9.9	11	19	34

表1展示了二项分布 $b(10, p)$ ， $p=\{0.01, 0.05, 0.1\}$ 的CUSUM控制图的运行长度分布。结果表明，参数估计所用的I阶段样本量对CUSUM控制图II阶段受控状态下的 ARL 值产生了不同程度的影响。随着 m 的增加， $p=\{0.01, 0.05, 0.1\}$ 对应的CUSUM控制图的 ARL 整体呈下降趋势，并逐渐趋于370。例如，当样本量 $m=100$ 时， $ARL=\{666.6, 740.7, 721.2\}$ 远大于370。而 $m=3000$ 时， $ARL=\{373, 373.7, 374.4\}$ 与目标值370非常接近，控制图表现出较为理想的性能。这表明样本量不足会显著影响参数估计的准确性，进而降低控制图的性能。因此应基于样本量动态调整控制限。

此外，随着样本量 m 的增加， $SDRL$ 逐渐减小，表明运行长度分布的变异性降低。运行长度分布的第10、50和90百分位数也表明，分布具有右偏性，但随着 m 的增加，分布逐渐趋于对称。

(二) 参数 p 固定时，控制图的性能分析

本节考虑I阶段样本量对具有固定参数 p 的CUSUM控制图性能的影响。不失一般性，考虑样本量 $m=\{100, 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000\}$ ，参数 $p=0.05$ ， $n=\{5, 10, 20\}$ 。参数已知时CUSUM控制图的 $h=\{6.81, 8.78, 10.86\}$ ，使得 $ARL_0=370$ 。

表2 参数未知时，二项分布 $b(n, 0.05)$ 的CUSUM控制图在不同第一阶段参考样本下的运行长度分布 ($n=5, h=6.81$; $n=10, h=8.78$; $n=20, h=10.86$)

n		5					10					20				
m	δ	ARL	SDRL	10th	50th	90th	ARL	SDRL	10th	50th	90th	ARL	SDRL	10th	50th	90th
100	0	726.1	1348.4	55	244	1790	740.7	1359.4	50	224	1873	716	1354.8	48	236	726.1
	0.2	212	415.3	35	101	436	147.1	251.4	28	78	305	93.7	135.6	22	57	212
	0.4	94.2	120.6	25	60	186	58.5	59.1	19	43	110	37	29.7	14	29	94.2
	0.6	56.1	53.6	20	43	102	35.6	25.4	15	29	62	22.4	12.3	11	20	56.1
500	0	434.5	550.5	65	265	962	423.0	519.7	61	255	963	411.4	498.5	55	250	434.5
	1	143.9	137.1	37	103	296	107.9	96	30	80	215	74.4	60.8	23	57	143.9
	2	77	58.2	26	61	147	52.4	34.9	20	43	96	34.2	20.1	14	29	77
	3	51.4	32.2	20	44	92	33.9	18.6	15	30	58	21.9	10.9	11	20	51.4
1000	0	401.9	436.1	70	267	903	386.9	419.2	62	256	868	382.7	417.9	57	251	401.9
	1	141.2	121.5	38	105	287	103.1	84.3	30	79	204	73.7	57.1	23	57	141.2
	2	74.1	50.9	26	61	140	51.2	32.4	20	43	92	34.1	19.5	15	30	74.1
	3	50.1	30.4	20	43	89	33.7	18.1	15	30	57	22	10.7	11	20	50.1

1500	0	386	393.7	67	260	862	383.3	392.6	62	260	853	375.8	400.2	57	254	386
	1	135.3	12.1	37	103	273	101.4	78.4	30	79	203	71.7	53	23	57	135.3
	2	75.5	52.3	26	62	143	51.3	32.3	20	43	92	33.9	19.2	15	29	75.5
	3	50.2	30.3	20	43	90	33.6	18.2	15	30	57	21.7	10.4	11	20	50.2
2000	0	379.1	372.5	67	264	828	375.6	365.7	65	262	825	374.8	368.4	58	252	379.1
	1	137.6	113.2	38	105	278	101.5	78.1	30	79	202	72.1	53.5	23	57	137.6
	2	74	49.4	26	62	137	50.8	31.4	20	43	91	33.4	18.7	15	29	74
	3	50.2	30.2	20	43	89	33.2	17.4	15	29	56	21.8	10.4	11	20	50.2
2500	0	378.8	373.9	67	261	833	374.3	368.7	63	255	837	373.8	358.4	60	251	378.8
	1	136.3	109.1	38	105	274	100.6	77.6	30	78	199	71.6	52.9	23	57	136.3
	2	74.7	51.3	26	61	141	51.4	31.9	20	44	92	33.2	18.8	15	29	74.7
	3	49.7	29.7	20	43	88	33.3	17.9	15	30	57	21.7	10.3	11	20	49.7
3000	0	375.5	363.2	68	264	824	373.7	359.7	64	263	814	372.9	356.0	59	254	375.5
	1	136.9	110.7	38	106	273	101.1	77.3	31	79	202	71.4	52.2	23	57	136.9
	2	74.8	50.5	26	61	139	51	31.9	20	43	93	33.7	18.8	14	29	74.8
	3	50	29.9	20	43	89	33.6	17.9	15	30	57	21.8	10.5	11	20	50

表2展示了二项分布 $b(n, 0.05)$, $n = \{5, 10, 20\}$ 的 CUSUM 控制图的运行长度分布, 可以看出:

(1) 样本量增加有利于 ARL 趋于 370。随着 m 的增加, $n = \{5, 10, 20\}$ 对应的 CUSUM 控制图的 ARL 整体呈下降趋势, 并逐渐趋于 370。例如, 当 $m=100$ 时, $ARL = \{726.1, 740.7, 716\}$ 明显偏离 370。而样本量 $m=3000$ 时, $ARL = \{375.5, 373.7, 372.9\}$ 与目标值 370 非常接近。

(2) n 的增大对 ARL 达到 370 有积极影响。例如 $m=1500$ 时, $n = \{5, 10, 20\}$ 对应的 $ARL = \{386, 383.3, 375.8\}$ 而 $m=2000$ 时 $ARL = \{379.1, 375.6, 374.8\}$ 。因此, 较大的试验次数 n 可以在相对较小的样本量 m 下, 使 ARL 更接近目标值 370。

(3) 从运行长度分布的其他指标来看, 随着 n 和 m 的增加, $SDRL$ 同样逐渐减小, 反映出运行长度分布的变异性降低,

过程更加稳定。运行长度分布的第 10、50 和 90 百分位数也表明, 分布具有右偏性, 不过随着 n 和 m 的增加, 右偏程度逐渐减弱, 分布逐渐趋于对称。

四、CUSUM 控制图的修正控制限

由于参数估计对控制图性能有显著影响, 若采用基于已知参数的控制限, 将可能导致误报警或不报警, 进而降低过程监控的有效性。因此, 为确保控制图能够在受控状态下仍达到 ARL_0 , 需要对控制限进行适当调整。本节通过 50000 次蒙特卡洛模拟计算样本量 $m = \{30, 50, 75, 100, 500, 1000, 1500, 2000\}$ 下, 参数 $n = \{5, 10, 20\}$ 和 $p = \{0.01, 0.05, 0.1\}$ 不同组合对应的修正控制限, 以确保 $ARL_0 = 370$ 。

表 3 参数未知条件下 CUSUM 控制图的修正控制限

(n,p)	(5,0.01)	(5,0.05)	(5,0.1)	(10,0.01)	(10,0.05)	(10,0.1)	(20,0.01)	(20,0.05)	(20,0.1)
30	2.5588	4.4234	5.3766	3.3412	5.6392	6.9438	4.2987	7.2318	8.7830
50	2.7299	4.9233	6.0861	3.6098	6.2861	7.6923	4.6946	8.0345	9.7133
75	2.8956	5.2834	6.4725	3.8121	6.7700	8.2751	5.2007	8.6333	10.3389
100	3.0025	5.4917	6.8168	4.0102	7.0721	8.6283	5.2014	8.9735	10.7773
500	3.3535	6.4305	7.9703	4.5484	8.2724	9.9432	6.0455	10.3656	12.1621
1000	3.4096	6.6002	8.1842	4.6661	8.4943	10.1705	6.2300	10.5795	12.4188
1500	3.4443	6.6751	8.2697	4.7195	8.5691	10.2373	6.2594	10.6650	12.6758
2000	3.4577	6.7085	8.3072	4.7316	8.6092	10.2801	6.3128	10.7078	12.6848
h	3.5005	6.8154	8.4622	4.8061	8.7832	10.4084	6.4091	10.8575	12.6888

表3展示了 (n, p) 不同组合下, 样本量 m 对应的修正控制限, 并展示了基于已知参数计算得到的理想控制限 h , 如表3最后一行所示。模拟结果表明, I 阶段进行参数估计产生的误

差导致修正后的控制限普遍低于理想控制限。同时, 随着样本量 m 的增加, 修正后的控制限逐渐增大, 并逐步接近理想控制限。这一趋势表明, 样本量的增加显著提升了参数估计的准确

性，从而缩小了修正控制限与理想控制限之间的差距。

五、结论

由于在实际生产质量监控中，过程参数通常是未知的。因此系统研究了参数估计对二项分布的 CUSUM 控制图性能的影响，

并提出修正控制限。研究结果表明，I 阶段样本量增加时，参数估计的准确性相应增加，并且修正控制限逐步接近已知参数条件下的控制限。在未来的研究中可以考虑参数估计对二项分布 EWMA 控制图的影响，并计算修正控制限。

参考文献

- [1]Walter A Shewhart. Some applications of statistical methods to the analysis of physical and engineering data. Bell System Technical Journal, 3(1):43 – 87, 1924.
- [2]Ewan S Page. Continuous inspection schemes. Biometrika, 41(1/2):100 – 115, 1954.
- [3]Stuart W Roberts. Control chart tests based on geometric moving averages. Technometrics, 42(1):97 – 101, 2000.
- [4]James M Lucas. Cumulative sum (cusum) control schemes. Communications in Statistics.
- [5]FF Gan. An optimal design of cusum control charts for binomial counts. Journal of.
- [6]Willis A Jensen, L Allison Jones–Farmer, Charles W Champ, and William H Woodall. Effects of parameter estimation on control chart properties: A literature review. Quality control and applied statistics, 52(3):245 – 248, 2007.
- [7]Stelios Psarakis, Angeliki K Vyniou, and Philippe Castagliola. Some recent developments on the effects of parameter estimation on control charts. Quality and Reliability Engineering International, 30(8):1113 – 1129, 2014.
- [8]Ronald JMM Does, Rob Goedhart, and William H Woodall. On the design of control charts with guaranteed conditional performance under estimated parameters. Quality and Reliability Engineering International, 36(8):2610 – 2620, 2020.
- [9]陶桂洪, 宋赞, 刘强. 基于参数估计的 CUSUM 质量控制图性能分析 [J]. 大连工业大学学报, 2018, 37(06):489–496.
- [10]Fan Yi and Peihua Qiu. An adaptive cusum chart for drift detection. Quality and Reliability Engineering International, 38(2):887 – 894, 2022.