

立方准晶梁反平面问题力学特性研究

毛圣植, 周德骏, 王朔昕, 徐靖雨, 夏金鹏, 赵宝生
辽宁科技大学机械工程与自动化学院, 辽宁 鞍山 114051
DOI:10.61369/ECE.2025020022

摘 要 : 为了研究立方准晶梁反平面问题, 对立方准晶梁的应力和变形进行分析。首先从立方准晶材料的基本方程出发, 获得声子场和相位子场的第三方向位移满足的方程。然后利用 Lur' e 方法, 引入单变量待定函数, 将位移用算子函数表示出来, 再利用几何方程和本构方程, 得到用算子函数表示的应力场, 并将应力场带入边界条件当中, 确定待定函数, 从而获得特定问题的位移场和应力场。最后将各物理量无量纲化, 并根据声子场和相位子场的位移、声子场中的应力分布情况, 得到相应的结论。

关 键 词 : 弹性理论; 立方准晶材料; 反平面; 应力场; 位移场

Study about Anti-plane Problem of Cubic Quasicrystals Beams

Mao Shengzhi, Zhou Dejun, Wang Shuoxin, Xu Jingyu, Xia Jinpeng, Zhao Baosheng

School of Mechanical Engineering and Automation, University of Science and Technology, Anshan, Liaoning 114051

Abstract : In order to study the anti-plane problem of cubic quasicrystal beams, the stress and deformation of cubic quasicrystal beams are analyzed. Firstly, starting from the basic equations of cubic quasicrystalline materials, the equations satisfied by the third direction displacement of phonon field and phase field is obtained. Secondly, using the Lur'e method, an operator function is introduced to represent the displacement using single variable undetermined functions. Then, by the geometric equations and constitutive equations, the stress field represented by the operator function is obtained, and the stress field is introduced into the boundary conditions to determine the undetermined function, thereby obtaining the displacement field and stress field of the specific problem. Finally, the physical quantities are dimensionless, and corresponding conclusions are obtained based on the displacement of the phonon field and phase field, as well as the stress distribution in the phonon field.

Keywords : theory of elasticity; cubic quasicrystals materials; anti-plane problem; deformation field; stress field

引言

准晶材料虽然发现得比较晚, 但其性能优势引起了广大科研工作者的注意, Shechtman^[1]和郭可信团队^[2-3]先后发现了准晶材料的存在, 而立方准晶材料则是由 Feng 等^[4]观察到的一种特殊的准晶材料, 它具有立方点群对称的特征。为了明确表现出准晶材料晶格的局部变化, 可以利用 Landau 的密度波理论来描述准晶弹性的物理性质, 认为在准晶体中有两个位移场, 分别存在于声子场和相位子场中^[5]。丁棣华团队^[6-7]总结出立方准晶弹性的基本关系, 范天佑^[8]从线弹性角度讨论了立方准晶理论的数学理论, 并获得了部分分析解。利用立方准晶材料的基本方程, Gao^[9]利用势函数理论推导出二维立方准晶材料的弹性位移通解, 姜腾霄^[10]等利用极坐标下的弹性函数, 分析了轴对称圆环和置入轴对称地基内圆筒, 获得了应力和位移的解析式, 刘兴伟^[11]、郭怀民^[12]、崔晓微^[13]等分别利用 Cauchy 积分公式、构造缺陷力学模型、解析延拓方法分析了一维六方压电准晶材料反平面断裂问题。

本文以立方准晶材料为研究对象, 研究立方准晶材料梁的反平面问题的通用解法, 并分析准晶材料性能对反平面梁的影响。

基金项目: 辽宁省“兴辽英才计划”资助项目(XLYC2411074)、辽宁科技大学大学生创新创业训练计划(X202410146379)。
作者简介: 毛圣植(2004—), 男, 辽宁抚顺人, 本科生在读。主要从事新型材料的力学性能等研究。
通讯作者: 赵宝生(1973—), 男, 吉林四平人, 教授。研究方向: 机械机构中的力学问题, 数学弹性力学。

一、立方准晶材料反平面问题的基本方程

立方准晶是一种重要的三维准晶体，其相位子场具有与声子场相同的不可约表示，应力张量和应变张量具有对称性。在直角坐标下 (x, y, z) ，范天佑^[8]给出无体力立方准晶材料反平面问题的基本方程，声子场位移分量 $\mathbf{u}$ 和相位子场位移分量 $\mathbf{w}$ 为：

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_z u_z(x, y), \quad \mathbf{w} = \mathbf{e}_z w_z(x, y) \quad (1)$$

式中： $\mathbf{e}_z$ 代表与平面 Oxy 垂直方向上的单位矢量； $u_z(x, y)$ 和 $w_z(x, y)$ 分别代表声子场和相位子场中的位移分量。

应力与位移之间的几何方程为：

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{1}{2} C_3 \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{1}{2} R_3 \frac{\partial w_z}{\partial x}, & \sigma_{yz} &= \frac{1}{2} C_3 \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{1}{2} R_3 \frac{\partial w_z}{\partial y}, \\ h_{zx} &= \frac{1}{2} R_3 \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{1}{2} K_3 \frac{\partial w_z}{\partial x}, & h_{yz} &= \frac{1}{2} R_3 \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{1}{2} K_3 \frac{\partial w_z}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

其中， σ_{xx} 和 σ_{yz} 为声子场应力； h_{zx} 和 h_{yz} 为相位子场应力； C_3 为声子场内的剪切弹性常数， K_3 为声子场内的剪切弹性常数， R_3 为声子场和相位子场的耦合剪切弹性常数。无体力平衡方程为：

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial h_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial h_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

将式 (3) 代入 (2) 可得位移平衡方程

$$C_3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_z + R_3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w_z = 0, \quad R_3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_z + K_3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w_z = 0 \quad (4)$$

对于一般情况， $C_3 K_3 - R_3^2 \neq 0$ ，式 (4) 简化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_z = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w_z = 0 \quad (5)$$

由此可以看出， u_z 和 w_z 都是二维的调和函数。

二、立方准晶材料反平面位移场和应力场

根据调和函数的 Lur' e 算子函数^[14]表示，它们可以写成如下形式

$$\begin{cases} u_z = \sin(y\partial_x) g_1(x) + \cos(y\partial_x) g_2(x) \\ w_z = \sin(y\partial_x) g_3(x) + \cos(y\partial_x) g_4(x) \end{cases} \quad (6)$$

这里， $g_i(x)$ ($i=1,2,3,4$) 是关于 x 的待定函数，

$$\sin(y\partial_x) = y\partial_x - \frac{(y\partial_x)^3}{3!} + \frac{(y\partial_x)^5}{5!} - \dots, \quad \cos(y\partial_x) = 1 - \frac{(y\partial_x)^2}{2!} + \frac{(y\partial_x)^4}{4!} - \dots \quad (7)$$

将位移场代入式 (2)，可得应力场

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{1}{2} C_3 \sin(y\partial_x) g_1' + \frac{1}{2} C_3 \cos(y\partial_x) g_2' + \frac{1}{2} R_3 \sin(y\partial_x) g_3' + \frac{1}{2} R_3 \cos(y\partial_x) g_4' \\ \sigma_{yz} = \frac{1}{2} C_3 \cos(y\partial_x) g_1' - \frac{1}{2} C_3 \sin(y\partial_x) g_2' + \frac{1}{2} R_3 \cos(y\partial_x) g_3' - \frac{1}{2} R_3 \sin(y\partial_x) g_4' \\ h_{zx} = \frac{1}{2} R_3 \sin(y\partial_x) g_1' + \frac{1}{2} R_3 \cos(y\partial_x) g_2' + \frac{1}{2} K_3 \sin(y\partial_x) g_3' + \frac{1}{2} K_3 \cos(y\partial_x) g_4' \\ h_{yz} = \frac{1}{2} R_3 \cos(y\partial_x) g_1' - \frac{1}{2} R_3 \sin(y\partial_x) g_2' + \frac{1}{2} K_3 \cos(y\partial_x) g_3' - \frac{1}{2} K_3 \sin(y\partial_x) g_4' \end{cases} \quad (8)$$

为了更好的描述，令

$$U = u_z|_{y=0} = g_2, \quad W = w_z|_{y=0} = g_4, \quad \Sigma = \sigma_{xx}|_{y=0} = \frac{C_3}{2} g_1' + \frac{R_3}{2} g_3', \quad H = h_{yz}|_{y=0} = \frac{R_3}{2} g_1' + \frac{K_3}{2} g_3' \quad (9)$$

此处， U 和 W 是关于 x 的函数，分别代表 $y=0$ 处 z 向位移， Σ 和 H 也是关于 x 的函数，分别代表 $y=0$ 平面上 z 向的切应力。利用 $y=0$ 处的这些物理量代替待定函数 $g_i(x)$ ($i=1,2,3,4$) 后，可得位移场为

$$\begin{cases} u_z = \frac{2K_3}{C_3 K_3 - R_3^2} \frac{\sin(y\partial_x)}{\partial_z} \Sigma(x) - \frac{2R_3}{C_3 K_3 - R_3^2} \frac{\sin(y\partial_x)}{\partial_z} H(x) + \cos(y\partial_x) U(x) \\ w_z = -\frac{2R_3}{C_3 K_3 - R_3^2} \frac{\sin(y\partial_x)}{\partial_z} \Sigma(x) + \frac{2C_3}{C_3 K_3 - R_3^2} \frac{\sin(y\partial_x)}{\partial_z} H(x) + \cos(y\partial_x) W(x) \end{cases} \quad (10)$$

代回式 (2) 可以得到利用 (9) 中定义的物理量表示的应力场

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sin(y\partial_x) \Sigma(x) + \frac{C_3}{2} \cos(y\partial_x) U'(x) + \frac{R_3}{2} \cos(y\partial_x) W'(x) \\ \sigma_{yz} = \cos(y\partial_x) \Sigma(x) - \frac{C_3}{2} \sin(y\partial_x) U'(x) - \frac{R_3}{2} \sin(y\partial_x) W'(x) \\ h_{zx} = \sin(y\partial_x) H(x) + \frac{R_3}{2} \cos(y\partial_x) U'(x) + \frac{K_3}{2} \cos(y\partial_x) W'(x) \\ h_{yz} = \cos(y\partial_x) H(x) - \frac{R_3}{2} \sin(y\partial_x) U'(x) - \frac{K_3}{2} \sin(y\partial_x) W'(x) \end{cases} \quad (11)$$

三、立方准晶材料梁面受反平面力时的位移场和应力场

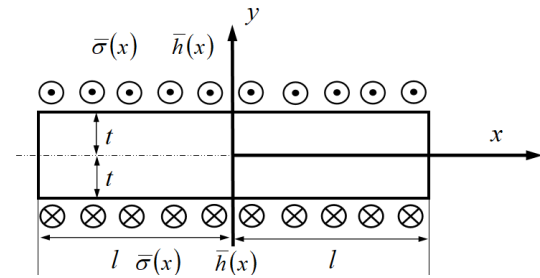


图1 反平面变形梁受力情况

研究如图1所示的结构，两个端部受到固定端约束长度为 $2l$ ，厚度为 $2t$ 的梁，取梁的两个对称轴分别为 x 轴和 y 轴如图所示，轴的正方向垂直于 Oxy 平面向外。梁的上下表面作用切向载荷，根据界面受力的特点，可以知道 $U(x) = W(x) = 0$ ，且边界条件可以写成：

$$\text{当 } y = \pm t \text{ 时, } h_{yz} = \bar{h}(x), \quad \sigma_{yz} = \bar{\sigma}(x) \quad (12)$$

将应力场 (13) 代入到边界条件 (12) 中，并整理可得：

$$\cos(t\partial_x) \Sigma(x) = \bar{\sigma}(x), \quad \cos(t\partial_x) H(x) = \bar{h}(x) \quad (13)$$

利用式 (7)，(13) 式展开并略去高阶项可得

$$\left[1 - \frac{(t\partial_x)^2}{2} + \frac{(t\partial_x)^4}{24} \right] \Sigma(x) = \bar{\sigma}(x), \quad \left[1 - \frac{(t\partial_x)^2}{2} + \frac{(t\partial_x)^4}{24} \right] H(x) = \bar{h}(x) \quad (14)$$

两式两侧同时作用算子 $\left[1 + \frac{(t\partial_x)^2}{2} + \frac{5(t\partial_x)^4}{24} \right]$ ，并略去高阶项得

$$\Sigma(x) = \left[1 + \frac{(t\partial_x)^2}{2} + \frac{5(t\partial_x)^4}{24} \right] \bar{\sigma}(x), \quad H(x) = \left[1 + \frac{(t\partial_x)^2}{2} + \frac{5(t\partial_x)^4}{24} \right] \bar{h}(x) \quad (15)$$

四、实例

当上下表面作用声子场切向载荷为二次函数、相位子场无载荷时，即边界条件 (12) 中，

$$\bar{h}(x) = 0, \quad \bar{\sigma}(x) = \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) q, \quad (16)$$

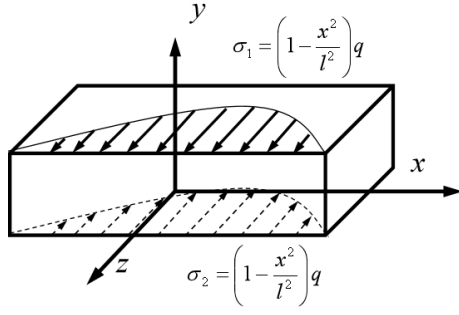


图2 表面作用抛物线型载荷的立方准晶梁

为了更好地描述各参数对结果的影响,对坐标、位移和应力等物理量进行无量纲化,令

$$\bar{x} = \frac{x}{t}, \bar{y} = \frac{y}{t}, \bar{u}_z = \frac{C_3 u_z}{2qt}, \bar{w}_z = \frac{R_3 w_z}{2qt}, \bar{\sigma}_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{q}, \bar{\sigma}_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{q} \quad (17)$$

立方准晶材料材料常数^[15]取 $C_3=1.532\text{GPa}$, $K_3=0.1532\text{GPa}$, $R_3=0.23\text{GPa}$ 。将以上结果代入到式(15),并代回到位移场和应力场,可得

$$\bar{u}_z = 1.29\bar{y} \left[1 - \left(1 + \bar{x}^2 - \frac{1}{3}\bar{y}^2 \right) \frac{1}{\lambda^2} \right], \bar{w}_z = -0.29\bar{y} \left[1 - \left(1 + \bar{x}^2 - \frac{1}{3}\bar{y}^2 \right) \frac{1}{\lambda^2} \right] \quad (18)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{q} = -\frac{2\bar{x}\bar{y}}{\lambda^2}, \bar{\sigma}_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{q} = \left[1 - \left(1 + \bar{x}^2 - \bar{y}^2 \right) \frac{1}{\lambda^2} \right], h_{xz} = 0, h_{yz} = 0 \quad (19)$$

其中 $\lambda = \frac{l}{t}$, 代表梁的长度与厚度的比值。利用精化分析的方法可得普通弹性梁理论 z 轴方向位移是

$$\bar{u}_z^* = \bar{y} \left[1 - \left(1 + \bar{x}^2 - \frac{1}{3}\bar{y}^2 \right) \frac{1}{\lambda^2} \right] \quad (20)$$

与之对照可知,在相同载荷作用下,立方准晶梁相对于晶体梁的位移大,抵抗剪切的能力偏弱。

图3到图5显示了不同长厚比情况下,在 $x=0$ 截面上,声子场和相位子场的位移、声子场的切应力沿梁厚方向的变化。

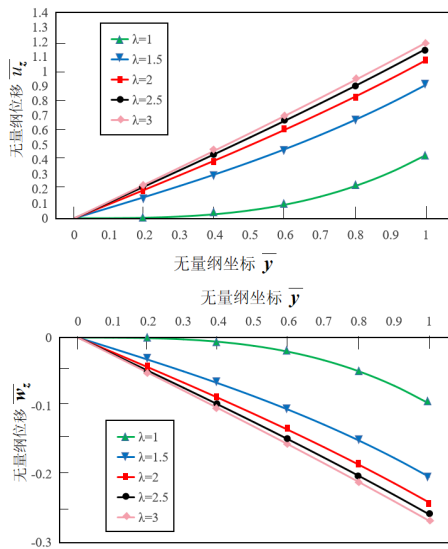


图3 不同 λ 梁在 $x=0$ 截面上声子场位移沿梁厚方向变化 图4 不同 λ 梁在 $x=0$ 截面上相位子场位移沿梁厚方向变化

如图3和图4所示,声子场位移与边界上作用力方向相同,相位子场位移与之相反,伴随着长厚比的越大,声子场和相位子场

的位移沿梁厚越接近于线性变化分布,在梁的上表面处达到最大值。如图5所示,声子场应力场呈抛物线状。

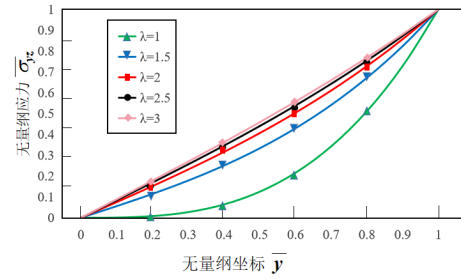


图5 不同长厚比反平面变形梁在 $x=0$ 截面上声子场应力沿梁厚方向变化

五、结论

通过对立方准晶材料反平面问题基本方程的分析,获得了获得声子场和相位子场的第三方向位移满足的方程。通过精化理论的研究思路,对上下表面作用切向载荷的立方准晶反平面梁进行分析,得到声子场和相位子场的位移和应力分布。计算表明,在上下表面作用声子场抛物线型切向载荷、相位子场无载荷时,声子场位移与边界上作用力方向相同,相位子场位移与之相反,伴随着长厚比的越大,声子场和相位子场的位移沿梁厚越接近于线性变化分布,在梁的上表面处达到最大值,声子场应力场呈抛物线状。在相同载荷和弹性常数情况下,立方准晶梁相对于晶体梁的位移大,抵抗剪切的能力偏弱。

参考文献

- [1]SHECHTMAN D,BLECH I,GRATIAS D,et al.Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry[J]. Physical Review Letters,1984,53(20):1951-1953.
- [2]YE H Q,WANG D,KUO K H.Five-fold symmetry in real and reciprocal spaces[J]. Ultramicroscopy,1985,16(2):273-277.
- [3]ZHANG Z,YE H Q,KUO K H.A new icosahedral phase with m35 symmetry[J]. Philosophical Magazine A,1985,52(6):L49-L52.
- [4]FENG Y C,LU G,WITHERS R L.An incommensurate structure with cubic point group symmetry in rapidly solidified V-Vi-Si alloy[J].Journal of Physics Condensed Matter,1989,1(23): 3695-3700.
- [5]王仁卉,胡承正,桂嘉年.准晶物理学[M].北京:科学出版社,2004: 1-7.
- [6]HU C Z,WANG R H,DING D H,et al.Point groups and elastic properties of two-dimensional quasicrystals[J].Acta Crystallog,1996, A 52(2):251-256
- [7]YANG W G,WANG R H,DING D H,et al.Linear elasticity theory of cubic quasicrystals[J].Physical Review B,1993,48(10):6999-7002.
- [8]范天佑.固体与软物质准晶数学弹性与相关理论及应用[M].北京:北京理工大学出版社,2014: 200-203.
- [9]Gao Y.Governing equations and general solutions of plane elasticity of cubic quasicrystals[J].Physics Letters A,2009,373:885-889.
- [10]姜腾霄,李公庆,赵宝生.立方准晶材料平面轴对称问题研究[J].辽宁科技大学学报,2023,46(2):140-146.
- [11]刘兴伟,李星,汪文帅.一维六方压电准晶中正n边形孔边裂纹的反平面问题[J].应用数学和力学,2020,41(07):713-724.
- [12]郭怀民,赵国忠,刘官厅,等.含唇口次生两不对称裂纹的一维六方压电准晶体的反平面剪切问题[J].固体力学学报,2024, 45(01): 123-134.
- [13]崔晓微,李联和.含螺旋位错有限大一维六方压电准晶楔形体的反平面问题[J].应用力学学报,2019,36(05):1058-1062+1257.
- [14]LUR' E A I.Three-dimensional Problems in the Theory of Elasticity[M].New York:Interscience Press,1964:60-62.
- [15]曹婷,付笑宇,张亮亮,等.三维立方准晶椭圆夹杂的 Eshelby 张量[J]. 固体力学学报,2022,43(6):750-762.