

执行器故障下高阶非线性多智能体系统的 非奇异有限时间控制

刘达才, 邓振杰

广东金融学院 计算机学院, 广东 广州 510521

DOI: 10.61369/TACS.2025030031

摘 要 : 本文首先研究了具有执行器故障的高阶非线性多智能体系统的非奇异有限时间约束控制问题。为了解决递归设计中出现的奇点问题, 李雅普诺夫函数的设计采用了添加功率积分器的技术来代替平方。然后, 利用模糊逻辑系统处理未知的非线性问题。为了实现执行器故障的快速补偿, 将分解法和界估计法相结合, 设计了新的补偿律。最后, 提出了一种新的有限时间控制方法来实现非奇异有限时间包围, 并通过仿真得到了严格的验证。

关 键 词 : 模糊逻辑系统; 多智能体系统; 随机故障; 非奇异有限时间控制

Non-singular Finite-time Control For High-order Nonlinear Multi-agent Systems With Actuator Failures

Liu Dacai, Deng Zhenjie

Guangdong University of Finance School of Computer Science, Guangzhou, Guangdong 510521

Abstract : In this paper, the non-singular finite-time containment control for high-order nonlinear multi-agent systems with actuation constraints is firstly investigated in this paper. To address avoid singularity in recursive design, the design of Lyapunov functions adopts adding a power integrator technique instead of square. Then, fuzzy logic systems are used to deal with unknown nonlinearities. To achieve the rapid compensation for actuator failures, decomposition method and bound estimation method are combined to design novel compensation laws. In the end, a novel finite-time control method is developed to achieve non-singular finite-time containment, which is rigorously confirmed by simulation.

Keywords : fuzzy logic system; multi-agent systems; random failures; non-singular finite-time control

引言

多智能体系统是指多个智能体通过协作完成任务, 具有效率高、功耗低的特点, 受到专家学者的广泛关注。包围控制的目的是让所有的跟随者到达由一些领航者构建的凸壳中。此外, 与线性系统^[1]相比, 非线性系统^[2]能够准确地描述物理工程系统在可变环境下机械结构的动态模型和复杂动态特性。对于高度不确定的非线性系统, 智能控制方法通过应用模糊逻辑系统处理不确定性, 消除了复杂的建模, 从而有效地简化了控制过程。

在系统的控制过程中, 收敛精度和收敛速度是衡量控制质量的重要指标。与渐近收敛相比, 有限时间稳定性不仅收敛速度快^[3], 而且对外部干扰具有更强的鲁棒性。需要注意的是, 在高阶非线性系统的有限时间控制中, 分数阶状态反馈控制法是一种非常有效的方法, 但它会产生奇异性问题。据我们所知, 高阶非线性多智能体系统在执行器约束下实现非奇异有限时间约束控制仍然是一个尚未解决的问题^[4-5]。

根据以上分析, 随机执行器故障下, 研究一种新颖的非奇异有限时间控制策略让所有高阶非线性跟随者在有限时间内到达由多个领航者构造的凸包内是非常有必要的^[6]。综上所述, 本文的主要贡献总结如下:

- 1) 基于反推法的高阶非线性多智能体系统控制器在设计具有奇异性。为了有效地避免这种情况, 李雅普诺夫函数的设计采用了添加功率积分器的技术来代替平方, 使得模糊逻辑系统可以用来近似未知的连续函数。
- 2) 执行器卡死故障不能视为干扰。采用分解法和边界估计法设计了新的有限时间补偿律, 实现了执行器约束的有限时间补偿。
- 3) 综合上述方法, 提出了一种新的有限时间容错控制方案, 以实现具有执行器故障的高阶多智能体系统的高质量非奇异有限时间包围控制。

基金项目: 本研究得到国家自然科学基金项目(62203125)、广东省基础与应用基础研究基金项目(2022A1515110184)、广州市科技计划项目(2023A04J0385)和广东省普通高校青年创新人才项目(2022KQNCX051, 2024A04J3363)的资助。

一、问题描述

(一) 基础知识

假设 $M-(M \geq 2)$ 领航者和 $N-(N \geq 1)$ 跟随者相互通信, 用拓扑图 $G=(V,E)$ 表示, 式中 V 为所有智能体的集合, $E \in V \times V$ 反映了智能体之间信息传递的方向。 $V=\{1,2,\dots,N+M\}$ 。为方便起见, 我们将 $N_m=\{i \in V|(i,m) \in E\}$ 设计为智能体 m 的邻域, 并设置 $F=\{1,\dots,N\}$ 为跟随者, 设置 $L=\{N+1,\dots,N+M\}$ 为领航者。因此, 跟随者 m 从其他跟随者那里得到的信息集合为 $N_m^F=N_m \cap F$, 跟随者 m 从领航者那里得到的信息集合为 $N_m^L=N_m \cap L$ 。方向边 (m,i) 的权重值为 a_{mi} , 入度值为 $\bar{a}_m=\sum_{i \in N_m} a_{mi}$ 。

定义: 连续系统 $\dot{x}=f(x,u)$, 式中 $x \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, $u \in \mathbb{R}$ 表示系统输入满足 $f(0,0)=0$ 。如果存在有限时间 T , 不等式 $x(t) < \epsilon, t \geq t_0+T$ 对任意 $\epsilon > 0$ 都成立, 则系统 $\dot{x}=f(x,u)$ 称为半全局实用有限时间稳定 (semi-global practical finitely time stable)。

引理1: 模糊逻辑系统可以在紧集上以任意精度 $\bar{\epsilon} > 0$ 逼近连续函数 $f(Z)$, 即 $f(Z)=W^{*T}\Psi(Z)+\epsilon, -|\epsilon| \leq \bar{\epsilon}$, 式中 W^* 为理想向量 W 。

引理2: 系统的状态变量 z 有一个正定函数 $V(z)$, 如果其时间导数 $\dot{V}(z)$ 满足: $\dot{V}(z) \leq -lV^g(z)+\kappa, t \geq 0$, 式中 $\kappa > 0, l > 0, 0 < g < 1$, 那么, 该系统为半全局实用有限时间稳定。

引理3: 如果 a 和 b 都是正数, 且 g 是一个正函数, 我们得到以下条件:

$$|x|^a|y|^b \leq a/a+bg|x|^{a+b} + \frac{b}{a+b}g^{-\frac{a}{b}}|y|^{a+b}$$

引理4: 对于自然数 x 和 y , 如果两个奇数之比 $b \geq 1$, 则

$$|x-y|^b \leq 2^{b-1}|x^b-y^b|, \quad |x^{1/b}-y^{1/b}| \leq 2^{1-1/b}|x-y|^{1/b}。$$

引理5: 对于自然数 x 和 y , $(c-1)(d-1)=1, c > 1, d > 1$, 有一个常数使得 $xy \leq h_1|x|^c+h_2|y|^d$ 式中 $h_1=\sigma^c/c$ 和 $h_2=1/(d\sigma^d)$ 。

引理6: 对于自然数 x 和正常数 $\bar{e}$, 若 $p=0.2785$, 则 $0 \leq |x-x \tanh(\frac{x}{\bar{e}})| \leq p\bar{e}$ 。

引理7: 不等式 $(\sum_{i=1}^N |x_i|)^c \leq \sum_{i=1}^N |x_i|^c$ 在条件 $0 < c \leq 1, x_i \in \mathbb{R}$ 下成立。

(二) 系统描述

本文研究的多智能体系统由 N 个跟随者组成, 跟随者采用严格反馈的形式。为了更贴合实际, 我们假设系统中的非线性函数是完全未知的。因此, 跟随者 m 的动态可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{z}_{m,i} &= z_{m,i+1} + F_{m,i}(\bar{z}_{m,i}), -1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{z}_{m,n} &= \sum_{k=1}^{M_m} g_{m,k} u_{m,k} + F_{m,n}(\bar{z}_{m,n}), \\ o_m &= z_{m,1}, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $\bar{z}_{m,i}=[z_{m,1}, \dots, z_{m,i}]^T$ 为状态变量, u_m 为控制输入, $g_{m,k}$ 为控制增益, $F_{m,i}(\cdot)$ 为连续函数构造的不确定性, M_m 为执行器个数, o_m 为执行器输出。考虑到执行器出现故障, 我们可以设置系统输入 $u_{m,k}$ 为

$$\begin{aligned} u_{m,k} &= \psi_{m,k}(t, t_\psi) \tau_{m,k} + \vartheta_{m,k}(t, t_\vartheta), \\ \psi_{m,k}(t, t_\psi) \vartheta_{m,k}(t, t_\vartheta) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $\psi_{m,k} \in [0, 1]$ 表示故障增益, $\vartheta_{m,k}$ 表示偏置故障, t_ψ 和 t_ϑ 表示致动器发生故障的瞬间。另外, 我们将领航者 l 的输出设置为 o_{rl} 。为了便于控制器的设计, 我们设置了以下假设: (1) 对于每个跟随者来说, 至少有一条与领航者相连的有向路径; (2) 控制增益 $g_{m,k}$ 是一个符号已知的有界未知常数; (3) 领航者的轨迹 o_r 及其

导数 $\dot{o}_r$ 是连续函数; (4) 即使 M_n-1 个执行器同时卡住, 跟随器 m 仍能正常工作。另外, 故障参数 $\vartheta_{m,k}(t, t_\vartheta)$ 是有界的。

注释1: 根据假设, 存在未知常数 $\bar{\kappa}_{m,k}$, 满足不等式 $|\vartheta_{m,k}(t, t_\vartheta)| \leq \bar{\kappa}_{m,k} < +\infty$ 。此外根据假设4,

$$\sum_{i=1}^{M_m} |g_{m,i} \psi_{m,i}| \geq \max\{|g_{m,1} \psi_{m,1}|, \dots, |g_{m,M_m} \psi_{m,M_m}|\} > 0。因此, 我们可以得到$$

$$\inf_{t \geq 0} \sum_{k=1}^{M_m} |g_{m,k}| \psi_{m,k}(t, t_\psi) > 0 \quad (3)$$

二、非奇异有限时间控制

(一) 控制器设计

在系统控制过程中, 跟随者 m 的协调误差为 $e_{m,1} = \sum_{i=1}^n (o_{ri} - z_{m,i}) + \sum_{i=1}^n (o_{ri} - o_{ri})$ 。考虑到所研究的系统是高阶的, 控制器的设计基于反步法。为了避免有限时间控制中的奇异性, 我们首先定义因子:

$r_1=1, r_{i+1}=r_i+\tau, -(i \in 1, \dots, n-1), -1/n < \tau < 0$ 式中 τ 表示偶数与奇数的比。此外, 我们还引入了未知常数 $\theta_{m,i}$ 及其估计 $\hat{\theta}_{m,i}$ 。因此, 我们可以得到估计误差 $\tilde{\theta}_{m,i} = \theta_{m,i} - \hat{\theta}_{m,i}$ 。

步骤1: 根据包围误差, 我们可以得到它的时间导数:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{m,1} &= \sum_{i=1}^n (o_{ri} - \dot{y}_i) + \sum_{i=1}^n (y_i - \dot{y}_i) \\ &= \bar{a}_m(z_{m,2} + F_{m,1}(z_{m,1})) - \sum_{i=1}^n (o_{ri} - \dot{y}_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (z_{i,1} + F_{i,1}(z_{i,1})) \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $\bar{a}_m = \sum_{i=1}^n a_{m,i} + \sum_{i=1}^n a_{m,i}$ 。根据假设1, 我们可以得到 $\bar{a}_m > 0$ 。考虑非奇异有限时间控制, 在李雅普诺夫候选函数中引入因子 r_i 。

$$\begin{aligned} V_{m,1} &= \frac{1}{2-\tau} e_{m,1}^{2-\tau} + \frac{1}{2} \hat{\theta}_{m,1}^2。利用(4), \quad V_{m,1} \text{的时间导数为} \\ \dot{V}_{m,1} &= \bar{a}_m e_{m,1}^{1-\tau} (z_{m,2} - \alpha_{m,1}) + e_{m,1}^{1-\tau} \bar{f}_{m,1}(Z_{m,1}) \\ &\quad - \hat{\theta}_{m,1} \dot{\hat{\theta}}_{m,1} + \bar{a}_m e_{m,1}^{1-\tau} \alpha_{m,1} \end{aligned}$$

式中 $\alpha_{m,1}$ 表示虚拟控制器, $Z_{m,1}=[z_{m,1}, z_{i,1}, z_{i,2}, o_{ri}, \hat{\theta}_{ri}]^T, -(i \in N_m^F, i \in N_m^L)$ 和

$$\begin{aligned} \bar{f}_{m,1}(Z_{m,1}) &= \bar{a}_m F_{m,1}(z_{m,1}) - \sum_{i=1}^n (o_{ri} - \dot{y}_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (z_{i,1} + F_{i,1}(z_{i,1})). \end{aligned}$$

注意, $\bar{f}_{m,1}(Z_{m,1})$ 存在未知项, 这些项可以包含在控制器中。但是,

$\bar{f}_{m,1}(Z_{m,1})$ 是连续的。根据引理1, 模糊逻辑系统可以用来近似

$\bar{f}_{m,1}(Z_{m,1})$ 。因此, 对于任何 $\epsilon_{m,1} > 0$, 满足等式:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{m,1}(Z_{m,1}) &= \mathcal{W}_{m,1}^T \Psi_{m,1}(Z_{m,1}) + \epsilon_{m,1}, -|\epsilon_{m,1}| \leq \epsilon_{m,1} \text{根据引理3, 我们有} \\ e_{m,1}^{1-\tau} \mathcal{W}_{m,1}^T \Psi_{m,1} &\leq \delta_{m,1} e_{m,1}^2 \theta_{m,1} + \pi_{m,1}, \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\delta_{m,1}$ 为正设计参数, $\theta_{m,1} = |\mathcal{W}_{m,1}^T|^{2/(1-\tau)}, \pi_{m,1} = (1+\tau)/2[2\delta_{m,1}/(1-\tau)]^{-(1-\tau)/(1+\tau)} > 0$ 。需要注意的是, 如果直接基于反推法设计控制器, 所设计的控制器需要相邻智能体的全部信息, 计算量很大。为了解决这一问题, 在控制器设计中, 采用高斯函数作为模糊隶属函数, 满足 $\Psi^T \Psi \leq 1$ 。使用这种方法, 如后面所示, 控制器被设计为只需要相邻代理的位置信息。根据引理5,

$$e_{m,1}^{1-\tau} \epsilon_{m,1} \leq \frac{1-\tau}{2} \sigma_{m,1}^{-\frac{2}{1+\tau}} e_{m,1}^2 + \frac{1+\tau}{2} \sigma_{m,1}^{-\frac{2}{1+\tau}} \epsilon_{m,1}^{\frac{2}{1+\tau}} \quad (6)$$

式中 $\sigma_{m,1}$ 为设计参数, $\sigma_{m,1} > 0$ 。将 (5) 引入 (6), 我们可以得到

$$\begin{aligned} e_{m,1}^{1-\tau} \bar{f}_{m,1}(Z_{m,1}) &\leq \delta_{m,1} e_{m,1}^2 \theta_{m,1} + \sigma_{m,1}^{-\frac{2}{1+\tau}} e_{m,1}^{\frac{2}{1+\tau}} \\ &\quad + \frac{1+\tau}{2} \sigma_{m,1}^{-\frac{2}{1+\tau}} \epsilon_{m,1}^{\frac{2}{1+\tau}} + \pi_{m,1} \end{aligned}$$

因此, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_{m,1} \leq & \bar{d}_m e_{m,1}^{1-\tau} (z_{m,2} - \alpha_{m,1}) + \bar{d}_m e_{m,1}^{1-\tau} \alpha_{m,1} \\ & + \Lambda_{m,1} + \left(\delta_{m,1} \theta_{m,1}^{\frac{1}{1-\tau}} + \sigma_{m,1}^{\frac{2}{1-\tau}} \right) e_{m,1}^2 - \bar{\theta}_{m,1} \dot{\theta}_{m,1} \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $\Lambda_{m,1} = \pi_{m,1} + (1+\tau)/2\sigma_{m,1}^{2/(1+\tau)}\bar{\epsilon}_{m,1}^{2/(1+\tau)}$ 。为实现有限时间控制，将虚拟控制信号 $\alpha_{m,1}$ 设计为

$$\alpha_{m,1} = -1/\bar{d}_m \left[l_{m,1} + 1 + \sigma_{m,1}^{\frac{2}{1-\tau}} + \delta_{m,1} \dot{\theta}_{m,1} \right] e_{m,1}^{\tau_2} \quad (8)$$

同时，将自适应律 $\dot{\theta}_{m,1}$ 设计为

$$\dot{\theta}_{m,1} = -\gamma_{m,1} \dot{\theta}_{m,1} + \delta_{m,1} e_{m,1}^2 \quad (9)$$

式中 $l_{m,1}$ 和 $\gamma_{m,1}$ 为正设计参数。将 (8) 和 (9) 代入 (7)，可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{m,1} \leq & -(l_{m,1} + 1) e_{m,1}^2 + \gamma_{m,1} \bar{\theta}_{m,1} \dot{\theta}_{m,1} + \Lambda_{m,1} \\ & + \bar{d}_m e_{m,1}^{1-\tau} (z_{m,2} - \alpha_{m,1}) \end{aligned} \quad (10)$$

步骤2：在此步骤中，考虑基于添加功率积分器技术的有限时间控制，我们将李雅普诺夫候选函数设计为

$$V_{m,2} = V_{m,1} + \int_{\alpha_{m,1}}^{z_{m,2}} \left(h^{\frac{1}{r_2}} - \alpha_{m,1}^{\frac{1}{r_2}} \right)^{2-\tau-r_2} dh + \frac{1}{2} \hat{\theta}_{m,2}^2 \quad (11)$$

式中， $\omega_{m,2} = \int_{\alpha_{m,1}}^{z_{m,2}} [h^{1/r_2} - \alpha_{m,1}^{1/r_2}]^{2-\tau-r_2} dh$ ， $e_{m,2} = z_{m,2}^{1/r_2} - \alpha_{m,1}^{1/r_2}$ 。根据 (10)，我们可以得到 $V_{m,2}$ 的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{m,2} \leq & -(l_{m,1} + 1) e_{m,1}^2 + \gamma_{m,1} \bar{\theta}_{m,1} \dot{\theta}_{m,1} + \Lambda_{m,1} \\ & + \bar{d}_m e_{m,1}^{1-\tau} (z_{m,2} - \alpha_{m,1}) + \frac{\partial \omega_{m,2}}{\partial e_{m,1}} \dot{e}_{m,1} \\ & + \frac{\partial \omega_{m,2}}{\partial \theta_{m,1}} \dot{\theta}_{m,1} + \frac{\partial \omega_{m,2}}{\partial z_{m,2}} \dot{z}_{m,2} - \bar{\theta}_{m,2} \dot{\theta}_{m,2} \end{aligned} \quad (12)$$

注释2：根据有限时间稳定条件，基于逆方法设计的控制器包含分数项，导致递归设计过程中存在奇异性。因此，我们在李雅普诺夫函数设计中使用 (11) 中的功率积分器技术，而不是平方。同时，引入了控制参数 τ ，并将其设置为偶数与奇数的比值。

利用引理3和4，我们可以得到

$$\bar{d}_m e_{m,1}^{1-\tau} (z_{m,2} - \alpha_{m,1}) \leq e_{m,1}^2 + l_{m,2} e_{m,2}^2 \quad (13)$$

式中 $l_{m,2} = \bar{d}_m^{2/r_2} r_2 (2 - r_2)^{(2-r_2)/r_2} / 4$ 。采用引理4，可得：

$$\left| \frac{\partial \omega_{m,2}}{\partial \alpha_{m,1}} \right| \leq c_{m,2} |e_{m,2}|^{1-\tau} \quad (14)$$

式中 $c_{m,2} \geq 2^{1-r_2} (2 - \tau - r_2)$ 。因此，我们可得

$$\left| \frac{\partial \omega_{m,2}}{\partial e_{m,1}} \dot{e}_{m,1} \right| \leq c_{m,2} |e_{m,2}|^{1-\tau} \left| \frac{\partial \alpha_{m,1}}{\partial e_{m,1}} \dot{e}_{m,1} \right| \quad (15)$$

$$\left| \frac{\partial \omega_{m,2}}{\partial \theta_{m,1}} \dot{\theta}_{m,1} \right| \leq c_{m,2} |e_{m,2}|^{1-\tau} \left| \frac{\partial \alpha_{m,1}}{\partial \theta_{m,1}} \dot{\theta}_{m,1} \right| \quad (16)$$

此外，根据引理6的描述，我们可以得到

$$\frac{\partial \omega_{m,2}}{\partial z_{m,2}} \dot{z}_{m,2} = e_{m,2}^{2-\tau-r_2} (z_{m,3} + F_{m,2}(\bar{z}_{m,2})) \quad (17)$$

现在，我们将 (13)-(17) 代入 (12) 可得：

$$\begin{aligned} \dot{V}_{m,2} \leq & -l_{m,1} e_{m,1}^2 + \gamma_{m,1} \bar{\theta}_{m,1} \dot{\theta}_{m,1} + \Lambda_{m,1} \\ & + e_{m,2}^{2-\tau-r_2} \alpha_{m,2} + e_{m,2}^{2-\tau-r_2} (z_{m,3} - \alpha_{m,2}) \\ & + |e_{m,2}|^{1-\tau} \bar{F}_{m,2}(Z_{m,2}) - \bar{\theta}_{m,2} \dot{\theta}_{m,2} \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $Z_{m,2} = [z_{m,3}, e_{m,2}, e_{m,1}, \bar{\theta}_{m,1}, \dot{\theta}_{m,1}]$ ，

$$\begin{aligned} \bar{F}_{m,2}(Z_{m,2}) = & c_{m,2} \left| \frac{\partial \alpha_{m,1}}{\partial e_{m,1}} \dot{e}_{m,1} \right| + c_{m,2} \left| \frac{\partial \alpha_{m,1}}{\partial \theta_{m,1}} \dot{\theta}_{m,1} \right| \\ & + l_{m,2} |e_{m,2}|^{1-\tau} + |e_{m,2}|^{1-\tau} F_{m,2}(\bar{z}_{m,2}) \end{aligned}$$

仿照 $\bar{F}_{m,1}(Z_{m,1})$ 的处理方法，可以得到

$$\begin{aligned} |e_{m,2}|^{1-\tau} \bar{F}_{m,2}(Z_{m,2}) \leq & \delta_{m,2} e_{m,2}^2 + \sigma_{m,2}^{\frac{2}{1-\tau}} e_{m,2}^2 \\ & + \frac{1+\tau}{2} \sigma_{m,2}^{\frac{2}{1-\tau}} \tau \frac{1}{\tau_2} \gamma_{m,2}^2 + \pi_{m,2} \end{aligned}$$

然后，(18) 可以转化为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{m,2} \leq & -l_{m,1} e_{m,1}^2 + \gamma_{m,1} \bar{\theta}_{m,1} \dot{\theta}_{m,1} + e_{m,2}^{2-\tau-r_2} \alpha_{m,2} \\ & + \Lambda_{m,2} + e_{m,2}^{2-\tau-r_2} (z_{m,3} - \alpha_{m,2}) \\ & + \delta_{m,2} e_{m,2}^2 + \sigma_{m,2}^{\frac{2}{1-\tau}} e_{m,2}^2 - \bar{\theta}_{m,2} \dot{\theta}_{m,2} \end{aligned} \quad (19)$$

式中

$$\Lambda_{m,2} = \Lambda_{m,1} + \pi_{m,2} + (1+\tau)/2\sigma_{m,2}^{2/(1+\tau)}\bar{\epsilon}_{m,2}^{2/(1+\tau)}。基于引理2，在这一步中，我们设计虚拟控制信号 $\alpha_{m,2}$ 为$$

$$\alpha_{m,2} = - \left(l_{m,2} + 1 + \sigma_{m,2}^{\frac{2}{1-\tau}} + \delta_{m,2} \dot{\theta}_{m,2} \right) e_{m,2}^{\tau_2} \quad (20)$$

此外， $l_{m,2}, \gamma_{m,2}$ 是正设计参数，自适应律 $\dot{\theta}_{m,2}$ 被设计为 $\dot{\theta}_{m,2} = -\gamma_{m,2} \dot{\theta}_{m,2} + \delta_{m,2} e_{m,2}^2$ 。

步骤 p ($p=3, \dots, n-1$)：按照步骤2的设计过程，我们选择了以下李雅普诺夫函数。

$$V_{m,p} = V_{m,p-1} + \omega_{m,p} + \frac{1}{2} \hat{\theta}_{m,p}^2 \quad (21)$$

式中 $\omega_{m,p} = \int_{\alpha_{m,p-1}}^{z_{m,p}} [h^{1/r_p} - \alpha_{m,p-1}^{1/r_p}]^{2-\tau-r_p} dh$ ， $\alpha_{m,p-1}$ 为步骤 $(p-1)$ 中设计的虚拟控制器。参考步骤2，我们定义 $e_{m,p} = z_{m,p}^{1/r_p} - \alpha_{m,p-1}^{1/r_p}$ ，设计虚拟控制器 $\alpha_{m,p}$ 为

$$\alpha_{m,p} = - \left(l_{m,p} + 1 + \sigma_{m,p}^{\frac{2}{1-\tau}} + \delta_{m,p} \dot{\theta}_{m,p} \right) e_{m,p}^{\tau_p} \quad (22)$$

和设计自适应律为 $\dot{\theta}_{m,p} = -\gamma_{m,p} \dot{\theta}_{m,p} + \delta_{m,p} e_{m,p}^2$ ，式中设计参数 $l_{m,p}, \gamma_{m,p}$ 为正数。在设计的控制器下，我们可以得到 $V_{m,p}$ 的时间导数：

$$\begin{aligned} \dot{V}_{m,p} \leq & - \sum_{i=1}^{p-1} l_{m,i} e_{m,i}^2 + \sum_{i=1}^p \gamma_{m,i} \bar{\theta}_{m,i} \dot{\theta}_{m,i} + \Lambda_{m,p} \\ & - e_{m,p}^2 + e_{m,p}^{2-\tau-r_p} (z_{m,p+1} - \alpha_{m,p}) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\Lambda_{m,p} = \Lambda_{m,p-1} + \pi_{m,p} + (1+\tau)/2\sigma_{m,p}^{2/(1+\tau)}\bar{\epsilon}_{m,p}^{2/(1+\tau)}。$$

步骤 n ：在这一步中，根据 $z_{m,n}$ 的定义，它的时间导数为

$$\dot{z}_{m,n} = \sum_{k=1}^{M_n} g_{m,n,k} \psi_{m,n,k} \tau_{m,n,k} + \lambda_{m,n} + F_{m,n}(\bar{z}_{m,n}) \quad (24)$$

式中 $\lambda_{m,n} = \sum_{k=1}^{M_n} g_{m,n,k} (\psi_{m,n,k} + \theta_{m,n,k})$ 。根据 (3)，可以知道 $\eta_m = \inf_{k=1}^M \sum_{i=1}^M |g_{m,i,k}| \psi_{m,i,k} > 0$ 。

同时，定义未知参数 β_m ， $\bar{\lambda}_m$ 为 $\beta_m = 1/\eta_m$ ， $\bar{\lambda}_m = \sup_{k=1}^M |\lambda_{m,k}|$ ，这些未知项可以通过设计自适应律来估计。因此，将 $\hat{\beta}_m$ 和 $\hat{\lambda}_m$ 分别定义为 β_m 与 $\bar{\lambda}_m$ 的估计，相应的估计误差为 $\tilde{\beta}_m = \beta_m - \hat{\beta}_m$ ， $\tilde{\lambda}_m = \bar{\lambda}_m - \hat{\lambda}_m$ 。考虑到这些估计误差，选择这一步的李雅普诺夫函数为：

$$V_{m,n} = V_{m,n-1} + \omega_{m,n} + \frac{1}{2} \hat{\theta}_{m,n}^2 + 1/2 \tilde{\lambda}_m^2 + \eta_m / 2 \tilde{\beta}_m^2 \quad (25)$$

按照步骤2的设计过程，我们可以得到 $V_{m,n}$ 的时间导数为：

$$\begin{aligned} \dot{V}_{m,n} \leq & - \sum_{i=1}^{n-1} l_{m,i} e_{m,i}^2 + \sum_{i=1}^n \gamma_{m,i} \bar{\theta}_{m,i} \dot{\theta}_{m,i} + \Lambda_{m,n} \\ & + e_{m,n}^{2-\tau-r_n} \alpha_{m,n} + \sum_{k=1}^{M_n} g_{m,n,k} \psi_{m,n,k} \tau_{m,n,k} + |e_{m,n}|^{1-\tau} \bar{F}_{m,n} \\ & + |e_{m,n}|^{1-\tau} \alpha_{m,n} + e_{m,n}^{2-\tau-r_n} \alpha_{m,n} + e_{m,n}^{2-\tau-r_n} \tilde{\beta}_m \\ & - e_{m,n}^{2-\tau-r_n} \alpha_{m,n} - \bar{\theta}_{m,n} \dot{\theta}_{m,n} - \tilde{\lambda}_m \dot{\lambda}_m - \eta_m \tilde{\beta}_m \dot{\beta}_m \end{aligned} \quad (26)$$

$$\Lambda_{m,n} = \Lambda_{m,n-1} + \pi_{m,n} + (1+\tau)/2\sigma_{m,n}^{2/(1+\tau)}\bar{\epsilon}_{m,n}^{2/(1+\tau)} + \theta \bar{\epsilon}_{m,n}$$

根据 (26) 的特点，设计了实际控制输入 $\tau_{m,k}$ 为

$$\begin{aligned} \tau_{m,k} = & \text{sgn}(g_{m,n,k}) \tau_{m,n}, -k=1, \dots, M_n, \\ \tau_{m,n} = & - \frac{e_{m,n}^{2-\tau-r_n} + \tilde{\beta}_m^2 \alpha_{m,n}}{\sqrt{e_{m,n}^{2-\tau-r_n} + \tilde{\beta}_m^2 \alpha_{m,n}^2 + \mu_n^2}} \end{aligned} \quad (27)$$

式中

$$\alpha_{m,n} = \left(l_{m,n} + \sigma_{m,n}^{\frac{2}{1-\tau}} + \delta_{m,n} \dot{\theta}_{m,n} \right) e_{m,n}^{1-\tau} + \tilde{\lambda}_m \tanh\left(\frac{e_{m,n}^{1-\tau}}{\mu_n}\right)$$

$$\dot{\theta}_{m,n} = -\gamma_{m,n} \dot{\theta}_{m,n} + \delta_{m,n} e_{m,n}^2 \quad (28)$$

$$\dot{\beta}_m = -\varphi_m \hat{\beta}_m + e_{m,n}^{2-\tau-r_n+1} \alpha_{m,n} \quad (29)$$

$$\dot{\lambda}_m = -\varphi_m \hat{\lambda}_m + e_{m,n}^{2-\tau-r_n+1} \tanh\left(\frac{e_{m,n}^{1-\tau}}{\mu_n}\right) \quad (30)$$

式中 $l_{m,n}, \gamma_{m,n}, \mu_m, \varphi_m, \phi_m$ 为正设计参数。

(二) 稳定性分析

通过以上的设计过程，可以得到以下定理

定理：高阶非线性多智能体系统 (1) 存在随机故障。在满足假设1-5的条件下，利用自适应模糊控制器 (27) 和自适应律

(28)–(30) 实现了非奇异有限时间包围且系统是半全局实用有限时间稳定。

证明：基于 $\alpha_{m,n}$ 的设计，我们可以得到

$$-e_{m,n}^{2-r_{n+1}} \alpha_{m,n} = - \left(l_{m,n} + \sigma_{m,n}^{\frac{2}{1-\tau}} + \delta_{m,n} \hat{\theta}_{m,n} \right) e_{m,n}^2 - e_{m,n}^{2-r_{n+1}} \bar{\lambda}_m \tanh \left(\frac{e_{m,n}^{2-r_{n+1}}}{\mu_m} \right)$$

根据 (27)，我们有

$$\begin{aligned} \dot{e}_{m,n}^{2-r_{n+1}} &\leq \sum_{k=1}^M g_{m,k} \psi_{m,k} h_{m,k} \tau_{m,k} \\ &\leq - \frac{\eta_m e_{m,n}^2 \hat{\beta}_m^2 \alpha_{m,n}^2}{\sqrt{e_{m,n}^2 \hat{\beta}_m^2 \alpha_{m,n}^2 + \mu_m^2}} \\ &\leq \eta_m \mu_m - e_{m,n}^{2-r_{n+1}} \eta_m \hat{\beta}_m \alpha_{m,n} \end{aligned} \quad (31)$$

式中 μ_m 是一个正常数。与此同时，

$$-e_{m,n}^{2-r_{n+1}} \eta_m \hat{\beta}_m \alpha_{m,n} + e_{m,n}^{2-r_{n+1}} \alpha_{m,n} = e_{m,n}^{2-r_{n+1}} \eta_m \hat{\beta}_m \alpha_{m,n} \quad (32)$$

根据引理6，我们可以得到

$$|e_{m,n}^{2-r_{n+1}} [\bar{\lambda}_m - e_{m,n}^{2-r_{n+1}} \bar{\lambda}_m \tanh \left(\frac{e_{m,n}^{2-r_{n+1}}}{\mu_m} \right)]| \leq \varrho \mu_m \bar{\lambda}_m \quad (33)$$

将 (28)–(33) 代入 (26) 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_{m,n} &\leq - \sum_{i=1}^n l_{m,i} e_{m,i}^2 + \sum_{i=1}^n \gamma_{m,i} \hat{\theta}_{m,i} \hat{\theta}_{m,i} + \Lambda_{m,n} \\ &\quad + \eta_m \mu_m + \varrho \mu_m \bar{\lambda}_m + \varphi_m \eta_m \hat{\beta}_m \hat{\beta}_m + \phi_m \bar{\lambda}_m \bar{\lambda}_m \end{aligned} \quad (34)$$

为了处理估计误差，采用 Young 不等式：

$$\gamma_{m,i} \hat{\theta}_{m,i} \hat{\theta}_{m,i} \leq - \frac{\gamma_{m,i}}{2} \hat{\theta}_{m,i}^2 + \frac{\gamma_{m,i}}{2} \theta_{m,i}^2, \quad \phi_m \bar{\lambda}_m \bar{\lambda}_m \leq - \frac{\phi_m}{2} \bar{\lambda}_m^2 + \frac{\phi_m}{2} \bar{\lambda}_m^2$$

， $\varphi_m \eta_m \hat{\beta}_m \hat{\beta}_m \leq - \frac{\varphi_m \eta_m}{2} \hat{\beta}_m^2 + \frac{\varphi_m \eta_m}{2} \beta_m^2$ 。然后，不等式 (26) 可以优化为：

$$\begin{aligned} \dot{V}_{m,n} &\leq - \sum_{i=1}^n l_{m,i} e_{m,i}^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_{m,i}}{2} \hat{\theta}_{m,i}^2 + \Lambda_{m,n} \\ &\quad - \frac{\phi_m}{2} \bar{\lambda}_m^2 - \frac{\varphi_m \eta_m}{2} \hat{\beta}_m^2 \end{aligned}$$

$$\Lambda_m = \Lambda_{m,n} + \sum_{i=1}^n \gamma_{m,i} \theta_{m,i}^2 / 2 + \phi_m \bar{\lambda}_m^2 / 2 + \varphi_m \eta_m \beta_m^2 / 2 + \eta_m \mu_m + \varrho \mu_m \bar{\lambda}_m$$

$$1/(2-\tau) e_{m,1}^{2-\tau} = \omega_{m,1} = \int_{\alpha_{m,0}}^{\alpha_{m,1}} [h^{1/r_1} - \alpha_{m,0}^{1/r_1}]^{2-\tau-r_1} dh, \quad \alpha_{m,0} = 0。因此，$$

李雅普诺夫函数 $V_{m,n}$ 可以用

$$V_{m,n} = \sum_{i=1}^n \omega_{m,i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \hat{\theta}_{m,i}^2 + 1/2 \bar{\lambda}_m^2 + \eta_m \omega / 2 \hat{\beta}_m^2$$

根据引理4， $\omega_{m,i} \leq 2e_{m,i}^{2-\tau}$ 。为方便起见，定义了一个参数 $s = 2/(2-\tau)$ 。利用引理3，对于 $\epsilon = (1-s)s^{s/(1-s)}$ ，可以得到不等式 $(\frac{1}{2} \hat{\theta}_{m,i}^2)^s \leq \frac{1}{2} \hat{\theta}_{m,i}^2 + \epsilon$ ，

$$\left(\frac{1}{2} \bar{\lambda}_m^2 \right)^s \leq \frac{1}{2} \bar{\lambda}_m^2 + \epsilon,$$

$$\left(\frac{\eta_m}{2} \hat{\beta}_m^2 \right)^s \leq \frac{\eta_m}{2} \hat{\beta}_m^2 + \epsilon$$

根据以上分析，以下不等式成立。

$$\begin{aligned} V_{m,n} &\leq 2 \sum_{i=1}^n e_{m,i}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \hat{\theta}_{m,i}^2 + \frac{1}{2} \bar{\lambda}_m^2 \\ &\quad + \frac{\eta_m}{2} \hat{\beta}_m^2 + (n+2)\epsilon \end{aligned}$$

通过设计常数 $l_m = \min\{l_{m,i}/2, \gamma_{m,i}, \phi_m, \varphi_m\}$ ， $i \in \{1, \dots, n\}$ ，我们可以得到

$$\dot{V}_{m,n} \leq -l_m V_{m,n}^s + \Lambda_m + (n+2)\epsilon$$

考虑到所研究的多智能体系统包含多个跟随者，我们将总的李雅普诺夫函数定义为 $v = \sum_{m=1}^N v_{m,n}$ 。因此，

$$\dot{V} = \sum_{m=1}^N \dot{V}_{m,n} \leq -lV^s + \Lambda,$$

式中 $l = \min\{l_m\}$ ， $\Lambda = \sum_{m=1}^N \Lambda_m + (n+2)N\epsilon$ 。由式可知， l 是常数， Λ 有

界，满足引理2的条件。当初始状态有界时， $V(0)$ 有界，系统为半全局一致稳定的。因此， $V(t)$ 对 $t \geq 0$ 有界，可以得到系统中的控制信号和输出信号在任何时候都有界。

注释3：迄今为止，针对有限时间非奇异包围控制问题，特别是进一步考虑到随机执行器卡滞故障问题的研究相对较少。本文引入功率积分器技术，有效地避免了回归设计中的奇异性问题，并用界估计法实现了对执行器卡滞故障的补偿。本文通过加入功率积分器技术和界估计方法，提出了一种易于应用于广义非线性系统的非奇异容错控制方案。

三、仿真实验

在本节中，仿真示例采用二维空间中的网络化船舶操舵系统^[3]，用空间坐标 x, y 表示。

$$\begin{aligned} \dot{z}_{m,1} &= z_{m,2} \\ \dot{z}_{m,2} &= \sum_{k=1}^2 u_{m,k} - \frac{z_{m,2}}{12} - \frac{0.3z_{m,2}^2}{21}, \\ o_m &= z_{m,1}. \end{aligned}$$

如图1所示，所研究的系统包含三个跟随者，标记为

$F1, \dots, F3$ ，四个领航者，标记为 $L1, \dots, L4$ 。

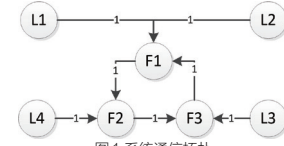


图1 系统通信拓扑

Fig.1 Communication topology of system

多智能体系统中跟随者的执行器的参数值如表1所示，式中

$t_1 = 4s$ ， $t_2 = 4s + 1$ ， $t_3 = 4s + 4$ ， $s = 1, 2, 3 \dots$ 表示秒。

表1 执行器参数

Table 1. Parameters of actuators

	$\psi_{m,k}(t),$ $t \in [t_1, t_2)$	$\vartheta_{m,k}(t),$ $t \in [t_1, t_2)$	$\psi_{m,k}(t),$ $t \in [t_2, t_3)$	$\vartheta_{m,k}(t),$ $t \in [t_2, t_3)$
m=1, k=1	1	0	0.5	0
m=2, k=1	1	0	0.6	0
m=3, k=1	1	0	0.5	0
m=1, k=2	0.3	0	0	$0.5 \cos(t)$
m=1, k=2	1	0	0	0
m=1, k=2	0.3	0	0	$\cos(t)$

此外，针对领航者分别设置为 $o_{r5} = [t, \cos(0.5t)]^T$ ，

$o_{r6} = [t + 2, \cos(0.5t)]^T$ ， $o_{r8} = [t, \cos(t/3)]^T$ ， $o_{r7} = [t + 2, \cos(t/3) - 0.5]^T$ 。同

时，我们设计 $\tau = -2/101$ 。状态 $z_{1,1,x}(0) = 1$ ， $z_{1,1,y}(0) = 0.5$ ， $z_{2,1,x}(0) = 1.5$ ，

$z_{2,1,y}(0) = 0.6$ ， $z_{3,1,x}(0) = 1$ ， $z_{3,1,y}(0) = 1$ ， $\hat{\theta}_{m,1,x}(0) = \hat{\theta}_{m,2,x}(0) = 1.5$ ，

$\hat{\theta}_{m,1,y}(0) = \hat{\theta}_{m,2,y}(0) = 1$ ， $\hat{\lambda}_{m,x}(0) = 0.5$ ， $\hat{\lambda}_{m,y}(0) = 0.3$ ，其他设置为0。

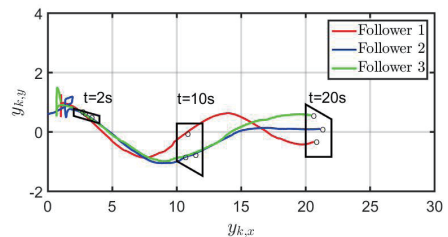


图2 系统运动轨迹

Fig.2 System motion trajectory

此外,设计参数被设置为 $l_{m,1}=l_{m,2}=3.6$ 、 $\sigma_{m,1}=\sigma_{m,2}=1$ 、 $\delta_{m,1}=\delta_{m,2}=0.5$ 、 $\gamma_{m,1}=\gamma_{m,2}=0.4$ 、 $\mu_m=0.1$ 、 $\varphi_m=0.15$ 、 $\phi_m=0.15$ 。

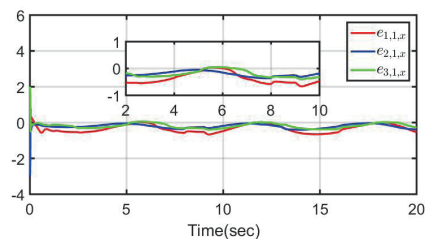


图3 包围误差 $e_{m,1,x}$

Fig.3 Containment error $e_{m,1,x}$

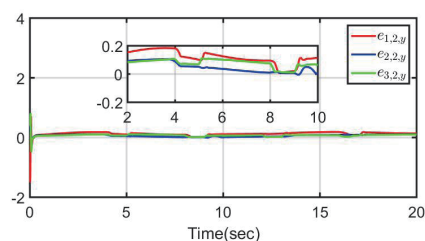


图4 包围误差 $e_{m,1,y}$

Fig.4 Containment error $e_{m,1,y}$

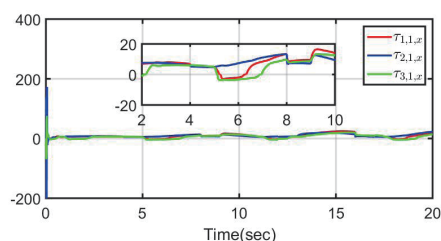


图5 实际输入 $\tau_{m,1,x}$

Fig.5 Actual input $\tau_{m,1,x}$

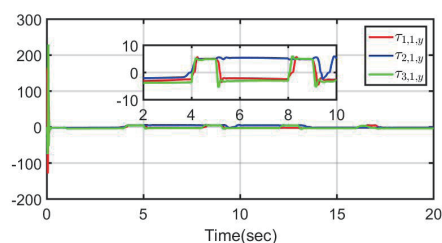


图6 实际输入 $\tau_{m,1,y}$

Fig.6 Actual input $\tau_{m,1,y}$

从仿真结果可以看出,在有限时间控制过程中,控制信号、自适应参数和输出信号都是有界的。虽然每个执行器可能有不同的故障,但协同控制误差渐近收敛到一个可调区域。此外,如图2-6所示,所提出的控制方案解决了奇异性问题,控制信号没有颤振。因此,所提出的定理得到了证实。

四、结论

通过以上严格的理论证明和仿真实验,可以明确地表明,在随机执行器故障情况下,采用本文提出的分布式有限时间模糊控制方法可以解决高阶非线性多智能体系统的非奇异有限时间控制问题。然而,该控制方案不能预先定义收敛区域。因此,未来的工作将侧重于具有预定义收敛域的高阶非线性多智能体系统的包围控制。

参考文献

- [1] D. Zhang and G. Feng, "A new switched system approach to leader - follower consensus of heterogeneous linear multiagent systems with dos attack," IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics:Systems, vol. 51, no. 2, pp. 1258 - 1266, 2021.
- [2] K.-L. Yin, Y.-F. Pu, and L. Lu, "Solving simo nonlinear systems with euler nonlinear filter," IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, vol. 69, no. 3, pp. 1897 - 1901, 2022.
- [3] Y. Li, F. Qu, and S. Tong, "Observer-based fuzzy adaptive finite-time containment control of nonlinear multiagent systems with input delay," IEEE Transactions on Cybernetics, vol. 51, no. 1, pp. 126 - 137, 2021.
- [4] Q. Wang, X. Dong, J. Yu, J. Lu, and Z. Ren, "Predefined finite-time " output containment of nonlinear multi-agent systems with leaders of unknown inputs," IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 68, no. 8, pp. 3436 - 3448, 2021.
- [5] Y. Wang and Y. Song, "Fraction dynamic-surface-based neuroadaptive finite-time containment control of multiagent systems in nonaffine purefeedback form," IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, vol. 28, no. 3, pp. 678 - 689, 2017.
- [6] H. Liang, Y. Zhang, T. Huang, and H. Ma, "Prescribed performance cooperative control for multiagent systems with input quantization," IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol. 50, no. 5, pp. 1810 - 1819,