

基于高维协方差矩阵估计的投资组合优化策略比较与分析

孙章爽¹, 张婷², 万宇雷³, 王国强^{1*}

1. 上海工程技术大学 数理与统计学院, 上海 201620

2. 菏泽职业学院 信息工程系, 山东 菏泽 274000

3. 上海金仕达软件科技股份有限公司 金仕达研究院, 上海 201203

DOI:10.61369/ASDS.2025070019

摘 要 : 在金融领域, 协方差矩阵的精确估计对于优化投资组合至关重要。研究旨在综合比较无条件协方差矩阵估计和条件协方差矩阵估计在投资组合优化中的表现, 并基于不同维度的股票和商品两种大类资产的数据进行投资组合优化的实证分析。结果显示: 对于低维情形, 无条件协方差矩阵估计在组合收益和组合风险偏差方面均具有突出表现; 对于高维情形, 条件协方差矩阵估计的表现更为有效。

关 键 词 : 协方差矩阵估计; 条件协方差; 压缩估计; 稀疏估计; 投资组合优化

Comparison and Analysis of Portfolio Strategies Based on High-Dimensional Covariance Matrices Estimation

Sun Zhangshuang¹, Zhang Ting², Wan Yulei³, Wang Guoqiang^{1*}

1. School of Mathematics, Physics and Statistics, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620

2. Department of Information Engineering, Heze Vocational College, Heze, Shandong 274000

3. Kingstar Research Institute, Shanghai Kingstar Software Technology Co., Ltd., Shanghai 201203

Abstract : In the financial field, the accuracy of covariance matrix estimation is crucial for the portfolio optimization. This paper aims to comprehensively compare the performance of unconditional covariance matrix estimation and conditional covariance matrix estimation in portfolio, with an empirical analysis of portfolio optimization based on data from two broad asset categories: stocks and commodities, across different dimensions. The results indicate that for low-dimensional scenarios, unconditional covariance matrix estimation exhibits outstanding performance in terms of portfolio returns and portfolio risk deviation. However, for high-dimensional scenarios, conditional covariance matrix estimation demonstrates more effective performance.

Keywords : covariance matrix estimation; conditional covariance; shrinkage estimation; sparse estimation; portfolio optimization

引言

协方差矩阵估计是多元统计分析中的重要问题之一, 在生物学、化学和金融学等领域中有着重要的应用价值^[1-3]。在当今大数据时代, 许多实际问题的数据呈现出高维特征, 这导致传统的样本协方差矩阵估计往往表现出奇异性, 特别是在金融领域的马科维茨均值方差模型等实际问题中, 传统的估计方法不再适用。因此, 高维情形下的协方差矩阵估计成为金融统计领域的热门研究问题。

协方差矩阵估计的研究主要涉及以下三种估计。一是基于收缩模型的协方差矩阵估计, 其主要思想是引入一个目标矩阵, 以减小估计量与真实协方差矩阵之间的误差, 包括线性收缩估计与非线性收缩估计。例如, Ledoit 和 Wolf 提出以单位矩阵为目标的线性收缩估计^[4]。在缺失真实协方差矩阵的情况下, Ledoit 和 Wolf 提出了仅对特征值进行收缩的非线性收缩估计^[5], 更多基于收缩模型的协方差

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (12171307, 11971302)。

作者简介:

孙章爽, 上海工程技术大学数理与统计学院, 硕士研究生, 研究方向为高维协方差矩阵估计及其应用;

张婷, 菏泽职业学院信息工程系, 硕士, 副教授, 研究方向为计算机应用技术;

万宇雷, 上海金仕达软件科技股份有限公司金仕达研究院, 博士, 研究方向为金融科技、机器学习与人工智能、金融统计与风险管理、大模型应用等。

通讯作者: 王国强, 上海工程技术大学数理与统计学院, 博士, 教授, 硕士生导师, 研究方向为最优化理论与算法、高维数据统计推断、金融统计与风险管理、综合评估、智能运维、机器学习与人工智能等。邮箱: guoq_wang@hotmail.com。

矩阵估计研究可参考^[6, 7]。二是基于因子模型的协方差矩阵估计，其主要思想是通过因子模型对数据进行降维处理，从而得到可行的估计量。例如 Fan 提出基于严格因子模型的协方差矩阵估计^[8]，Fan 提出主成分正交补阈值（Principal Orthogonal complement Thresholding, POET）估计器^[9]，杨小卜构造了样本协方差矩阵与因子收缩模型协方差矩阵的凸组合^[9]。最近，Ruan 等提出了基于投影技术的半参数因子模型进行高维协方差矩阵估计^[11]。更多基于因子模型的协方差矩阵估计研究可参考^[12]。三是基于稀疏方法的协方差矩阵估计，其主要思想是引入惩罚函数或阈值算子，以构建满足稀疏性假设的协方差矩阵估计。Rothman 提出基于广义阈值算法的协方差矩阵估计^[13]。更多基于稀疏方法的协方差矩阵估计研究可参考^[14-16]。

在金融领域，协方差矩阵估计的精度直接影响到投资组合优化的效果。特别地，多元广义自回归条件异方差（Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, GARCH）模型常被用来预测具有时变性质的条件协方差矩阵。Engle 提出的动态条件相关（Dynamic Conditional Correlation, DCC）模型是最常用的多元 GARCH 模型之一^[17]。国内外学者构建出系列高效的拓展 DCC 模型。例如基于区间数据的 DCC-OHLC 模型^[18]、基于动态条件角相关的 DCC 模型及其扩展^[19, 20]等。特别地，刘丽萍将 POET 估计器与 DCC 模型充分结合，构建了基于主成分正交补门限方法的 DCC 模型^[20]。更多条件协方差矩阵估计的研究可参考^[21]。

本文旨在综合比较多种高维协方差矩阵估计方法在投资组合优化中的应用效果。具体而言，本文基于我国股票和商品两种大类资产的数据进行协方差矩阵估计的实证分析，进而完成对市场风险的度量。进一步，以此为基础构建全局风险最小的投资组合优化，并综合对比不同协方差矩阵估计方法在投资组合优化中的表现。相对于其他风险预测或投资组合优化分析的文献，本文的创新之处在于以下两个方面：首先，本文同时对比了无条件协方差矩阵估计和条件协方差矩阵估计在投资组合优化中的估计效果；其次，本文选用多种维度和多种类别资产的资产指数，以识别高维协方差矩阵估计所对应的有效应用场景。

一、研究设计

（一）协方差矩阵估计

本文利用多种方法对收益率协方差矩阵进行预测与对比分析。由于无条件协方差矩阵估计不包含时间信息，因此我们使用滑动窗口算法对每个时期的协方差矩阵进行估计。假设 21 个交易日为一个月，固定的滑动时间周期为 T （设置为 252 个交易日），则对于第 m 月的无条件协方差矩阵，可采用该月第一天前 T 日的资产收益率来预测该月的协方差矩阵，并以该月的 21 天收益率作为未来回报收益。

下面，简要介绍常见的无条件协方差矩阵估计和条件协方差矩阵估计，详细可参考对应的参考文献。

表 1：常见的无条件协方差矩阵估计
Table 1: Common unconditional covariance matrix estimation

方法	缩写	协方差矩阵估计公式	文献
单位矩阵为目标的线性收缩估计	I-LW	$\hat{\Sigma} = \rho_1 I + \rho_2 S$	[4]
二次逆收缩估计	QIS	$\hat{\Sigma} = \frac{u_i^T \Sigma^2 u_i}{u_i^T \Sigma u_i}$	[23]
图套索估计	Glasso	$\hat{\Sigma}^{-1} = \arg \max_{\Sigma} (\log \Sigma^{-1} - tr(\Sigma^{-1} S) - \rho \Sigma^{-1} _1)$	[24]
主成分正交补阈值估计	POET	$\hat{\Sigma}_K = \sum_{i=1}^K \hat{\lambda}_i \hat{\xi}_i \hat{\xi}_i' + \hat{R}_K^c$ $\hat{R}_K^c = (\hat{r}_{ij}^c)_{p \times p}, \hat{r}_{ij}^c = \begin{cases} \hat{r}_{ii}, & i = j \\ s_{ij}(\hat{r}_{ij}) I(\hat{r}_{ij} \geq \tau_{ij}), & i \neq j \end{cases}$	[9]

其中， ρ_1, ρ_2 为未知参数， S 为样本协方差矩阵； ρ 为惩罚参数， $(\cdot)^{-}$ 表示将对角元素变为 0、其他元素保持不变的矩阵算子； $\hat{\lambda}_i$ 和 $\hat{\xi}_i$ 为重排后的特征值与对应特征向量， $s_{ij}(\cdot)$ 为广义收缩函数， $\tau_{ij} > 0$ 为阈值参数。

对于条件协方差矩阵估计，假设 N 个资产的收益率 r_t 向量均满足一定的均值方程，即

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad (1)$$

其中， μ 为平均收益率， ε_t 为随机变量，满足 $E[\varepsilon_t] = 0$ 。则最终的条件协方差矩阵可通过

$$H_t = D_t R_t D_t \quad (2)$$

计算得到，其中 $D_t = \text{diag}(\sqrt{\sigma_{1t}^2}, \dots, \sqrt{\sigma_{Nt}^2})$ ， σ_i^2 为单个资产的方差。

表 2：常见的条件协方差矩阵估计
Table 2: Common conditional covariance matrix estimation

方法	缩写	协方差矩阵估计公式	文献
动态条件相关模型	DCC	$\begin{cases} Q_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)S + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' + \theta_2 Q_{t-1} \\ R_t = \text{diag}(Q_t)^{-1} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-1} \end{cases}$	[17]
使用 OHLC 价格的动态条件相关模型	DCC-OHLC	$R_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)R + \theta_1 \Phi_{t-1} + \theta_2 R_{t-1}$	[18]
动态条件角相关模型	DCAC	$R_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)R + \theta_1 \Gamma_{t-1} + \theta_2 R_{t-1}$	[19]
主成分正交补门限动态条件相关模型	poetDCC	$\begin{cases} \tilde{Q}_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)S + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' + \theta_2 \tilde{Q}_{t-1} \\ \tilde{R}_t = \text{diag}(\tilde{Q}_t)^{-1} \tilde{Q}_t \text{diag}(\tilde{Q}_t)^{-1} \end{cases}$	[20]

其中， ε_t 为标准化残差， Q_t 为估计过程中引入的辅助矩阵， $\tilde{Q}_t$ 表示模型额外对矩阵 Q_t 进行了谱分解与正交补门限方法的应用； θ_1, θ_2 为相关性参数，满足 $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ 且 $\theta_1 + \theta_2 < 1$ ； Φ_t 为 Popov 相关矩阵， Γ_t 为角相关矩阵。值得注意的是，DCC 模型、poetDCC 模型与 DCAC 模型的单资产方差 σ_i^2 均满足 GARCH（1，1）过程，即

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2. \quad (3)$$

而 DCC-OHLC 使用 Range-GARCH 模型:

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i h_{p_t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (4)$$

进行单变量方差估计, 其中 $h_{p_t}^2 = [\ln(H_t / L_t)]^2 / (4 \ln 2)$ 是基于最高价 H_t 与最低价 L_t 的区间估计。

(二) 投资组合优化模型

为了评估上述方法在协方差矩阵估计中的效果及其差异, 本文采用了不设定预期收益的全局最小风险 (Global Minimum Variance, GMV) 策略^[25]来避免预期收益过高的影响, 具体优化模型如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & \omega' \Sigma \omega \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^N \omega_i = 1, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, N 为资产数量, ω 为资产组合权重, Σ 使用 2.1 节所述估计进行预测与替换。

(三) 预测效果评估

为了比较各协方差矩阵估计在上述 GMV 策略中的性能差异, 本文使用样本外组合收益和样本外组合风险进行评估。

1. 样本外组合收益评估

对于组合收益, 本文采用 AV, SD, IR 和 SR 进行评估, 详细可参考^[26]。假设第 i 月的平均收益分别为 r_i , 在样本外预测中共包含 n 个月, 则样本外年化平均组合收益为:

$$AV = 252 \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i. \quad (6)$$

类似地, 假设这 n 个月间的平均收益为 $\bar{r}$, 则样本外年化标准差为:

$$SD = \sqrt{252} \times \frac{1}{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}. \quad (7)$$

若以 0 为基准, 则可以计算样本外信息比率 $IR = AV / SD$ 。若以无风险利率 r_f 作为基准, 则可以计算样本外夏普比率 $SR = (AV - r_f) / SD$ 。

2. 样本外组合风险评估

对于组合风险偏差, 假设 ω 为预测资产权重, Σ 为已实现资产风险, $\hat{\Sigma}$ 为预测资产风险, 则可采用组合风险的平方追踪误差 (Square Tracking Error, STE), 即

$$STE = (\sqrt{\hat{\omega}' \hat{\Sigma} \omega} - \sqrt{\omega' \Sigma \omega})^2 \quad (8)$$

进行评估。STE 越接近于 0, 则代表预测的风险变化越接近于真实风险变化且组合风险越小。

(四) 样本选取

为了对比分析不同协方差矩阵估计的预测效果, 本文选择了不同维度的两种大类资产来进行检验, 包括以上证 50、中证

100 和沪深 300 指数为代表的股票, 以及以南华商品综合指数 (NHCI) 为代表的商品。由于不同公司创立时间存在差异, 因此本文选择数据覆盖范围最广的时间段 2014 年 1 月至 2024 年 7 月的所有日线数据进行分析。表 3 展示了不同维度指数在样本区间日收益率的描述性统计结果。

表 3: 描述性统计分析
Table 3: Descriptive statistical analysis

	指数 维度	均值 $\times 10^{-4}$	最小值	最大值	标准差	偏度	超额峰 度
NHCI	20	4.4843	-0.1700	0.1700	0.0153	0.0178	3.8272
上证 50	50	2.8099	-0.6461	0.1013	0.0222	-0.5309	16.8943
中证 100	100	5.0338	-0.5170	0.2001	0.0249	-0.4105	12.6600
沪深 300	300	4.0650	-0.5170	0.2001	0.0243	-0.2159	10.8349

进一步, 计算大类资产指数间的相关系数, 如图 1- 图 3 展示。

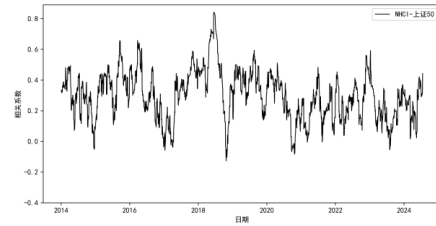


图 1: NHCI- 上证 50 资产间动态相关性

Fig. 1: Dynamic correlation between NHCI-SSE 50 assets

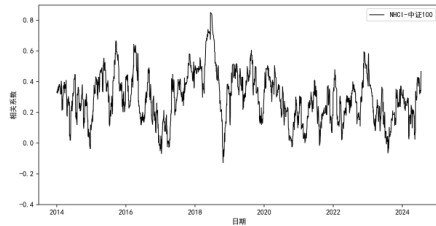


图 2: NHCI- 中证 100 资产间动态相关性

Fig. 2: Dynamic correlation between NHCI-CSI 100 assets

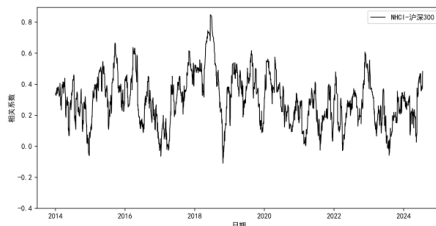


图 3: NHCI- 沪深 300 资产间动态相关性

Fig. 3: Dynamic correlation between NHCI-HS 300 assets

图 4 呈现了不同维度指数成分间的相关性热力图。可以得到, 各资产间相关系数均不超过 0.95, 即无高度相关资产, 符合传统协方差矩阵估计和动态条件相关模型的限制, 能够使用上述方法进行协方差矩阵估计。

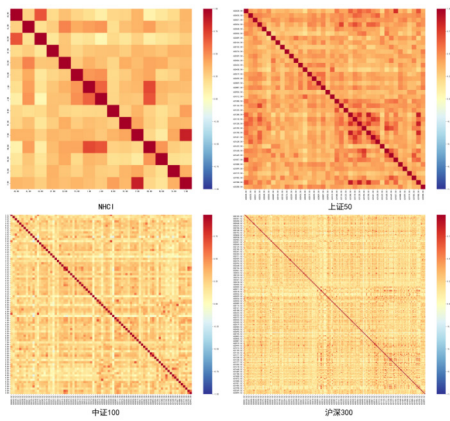


图4：不同指数成分股间相关性

Fig. 4: The correlation among the constituent stocks of different indices

二、实证检验

（一）投资收益评估

表4汇总了等权重估计策略和8种协方差矩阵估计在投资组合

表4：不同估计器在投资组合优化中的收益预测表现

Table 4: The performance of different estimators in the return prediction of portfolio optimization

		等权重	I-LW	QIS	Gllasso	POET	DCC	poetDCC	DCAC	DCC-OHLC
NHCI	AV	3.82894	3.85053	3.82631	3.82364	3.82924	3.71015	3.75442	3.41183	3.26705
	SD	4.50922	4.50374	4.58795	4.50662	4.59185	5.89029	4.78411	4.11373	4.18988
	IR	0.84914	0.85496	0.83399	0.84845	0.83392	0.62988	0.78477	0.82938	0.77975
	SR	0.31341	0.31859	0.30746	0.31242	0.30784	0.21976	0.27983	0.24215	0.20319
上证50	AV	5.55536	5.54165	5.55263	5.50682	5.83244	5.38105	5.37941	5.24610	4.30779
	SD	5.56154	6.09980	6.32674	6.16631	10.23962	6.19460	5.95298	5.12468	5.40368
	IR	0.99889	0.90850	0.87765	0.89305	0.56960	0.86867	0.90365	1.02369	0.79720
	SR	0.56453	0.51247	0.49582	0.50129	0.33368	0.47870	0.49785	0.55231	0.35015
中证100	AV	6.19891	6.16588	6.13778	6.04795	6.45002	6.55631	5.88006	5.40376	4.88705
	SD	7.01976	6.18041	6.32899	6.18823	7.51895	3.45990	5.67271	4.66914	5.49440
	IR	0.88307	0.99765	0.96979	0.97733	0.85783	1.89494	1.03655	1.15733	0.88946
	SR	0.53894	0.60679	0.58810	0.58696	0.53655	1.19674	0.61071	0.63996	0.44980
沪深300	AV	3.35751	3.01501	3.01005	2.97209	2.87005	3.36201	3.11137	2.86376	2.67106
	SD	5.99815	4.77110	4.76993	5.43716	5.56813	4.83269	4.67697	3.51101	3.37101
	IR	0.55976	0.63193	0.63105	0.54663	0.51544	0.69568	0.66525	0.81565	0.79236
	SR	0.15702	0.12562	0.12461	0.10233	0.08160	0.19582	0.14874	0.12762	0.07575

（二）投资风险评估

表5展示了不同协方差矩阵估计在投资组合优化中的STE表现。由此可知，在维度较低时，无条件协方差矩阵估计表现出较好性能。例如，对于NHCI指数，线性收缩I-LW估计呈现出最

优化中的预测表现，粗体代表该指标下的最优值，斜体代表在等权重策略为最优时剩余方法中的次优值。可以看到，在不同情况下，协方差矩阵估计的表现呈现显著差异。从指数角度来看，无条件协方差矩阵估计在维度较小、低峰值时更具有优势，其中线性收缩I-LW估计预测效果最好，得到了最高的AV，IR和SR，其AV相对于条件协方差矩阵估计平均提升8.90%，SR平均提升34.86%。随着指数维度提升，条件协方差矩阵估计逐渐展现其优势。对于中证100和沪深300，DCC模型得到最大的AV值和SR值，且AV相对于无条件协方差矩阵估计平均提高5.74%和13.32%，SR值平均提升106.48%和80.41%。同时，对于预测收益波动性的SD指标，条件协方差矩阵估计总是得到最低值。

综上，本文可以得到如下结论：第一，在低维且分布平坦的数据集中，无条件协方差矩阵估计在收益预测方面呈现出显著优势；第二，随着维度增长，条件协方差矩阵估计在收益预测上逐渐展现其优越性，代表超额收益的夏普比率SR也保持相同趋势；第三，条件协方差矩阵估计在预测收益的稳定性方面具有比较稳定的突出表现。

低的STE，其相对于条件协方差矩阵估计平均降低99.51%。随着资产维度提升，条件协方差矩阵估计凸显其优势，其中DCC模型表现出强劲的性能。相对于无条件协方差矩阵估计，DCC模型在上证50和中证100中组合风险平均降低62.68%和92.55%。

表5：不同估计器在投资组合优化中的风险预测表现

Table 5: The performance of different estimators in risk prediction of portfolio optimization

	等权重	I-LW	QIS	Gllasso	POET	DCC	poetDCC	DCAC	DCC-OHLC
NHCI	0.12213	0.00005	0.00006	0.00006	0.00006	0.01050	0.00054	0.03318	0.00009
上证50	0.00515	0.00076	0.00079	0.00089	0.00394	0.00063	0.00194	0.00767	0.00092
中证100	0.00099	0.00024	0.00024	0.00040	0.00179	0.00005	0.00076	0.02190	0.00056
沪深300	0.00005	0.00048	0.00035	0.00051	0.00096	0.00054	0.00071	0.01737	0.00038

由上，不难发现协方差矩阵估计在投资组合优化中呈现出两方面的差异，一是无条件协方差矩阵估计在低维情形下对于组合收益与组合风险偏差具有较大优势；二是条件协方差矩阵估计在高维数据集中更具有亮眼的表现。

（三）稳健性检验

为了验证上述结果的稳健性，本文分别采用50天和150天作

为滑动时间周期 T ，使用相同指数进行验证，得到的研究结果与上述分析一致，说明了结果的稳健性，具体结果如

表6- 表9所示。特别地，随着滑动时间周期减少，DCAC 模型在沪深300指数中呈现更集中的优势；同时，随着滑动时间周期减少，可代表数据集维度信息的浓度比 N/T 增加，DCC-OHLC 模型在 NHCI 中获得更低的 STE，最终呈现仍与原结论保持一致。

表6：组合收益预测稳定性检验（ $T=50$ ）
Table 6: Stability test of portfolio return prediction ($T=50$)

		等权重	I-LW	QIS	Gllasso	POET	DCC	poetDCC	DCAC	DCC-OHLC
NHCI	AV	4.05645	4.08493	4.08812	4.07778	4.12882	4.01431	4.01323	3.85316	3.84385
	SD	5.00450	4.66697	4.74811	4.69699	4.90506	6.87263	5.26804	5.05354	5.13216
	IR	0.81056	0.87528	0.86100	0.86817	0.84175	0.58410	0.76181	0.76247	0.74897
	SR	0.32786	0.35767	0.35223	0.35386	0.34926	0.23261	0.30325	0.28445	0.27828
上证50	AV	5.69840	5.79437	5.79567	5.75936	5.79683	5.74946	5.69737	5.57430	5.25689
	SD	6.55726	5.91509	5.74654	6.02382	6.98647	6.78131	7.05989	5.93142	6.36033
	IR	0.86902	0.97959	1.00855	0.95610	0.82972	0.84784	0.80701	0.93979	0.82651
	SR	0.50062	0.57120	0.58818	0.55507	0.48396	0.49161	0.46483	0.53252	0.44671
中证100	AV	6.23216	6.27769	6.31985	6.23944	6.27517	6.27241	6.00119	5.77376	5.47845
	SD	5.80007	5.63015	6.88436	5.57696	5.89607	2.89026	5.73981	4.93186	5.32168
	IR	1.07450	1.11501	0.91800	1.11879	1.06430	2.17019	1.04554	1.17071	1.02946
	SR	0.65800	0.68595	0.56711	0.68563	0.65458	1.33438	0.62467	0.68089	0.57552
沪深300	AV	3.17462	3.17071	3.22526	2.93947	3.00517	2.65814	3.20546	3.44204	3.17894
	SD	4.61773	4.02921	4.08423	4.75465	4.38141	5.10566	5.37155	3.51332	3.88470
	IR	0.68748	0.78693	0.78969	0.61823	0.68589	0.52063	0.59675	0.97971	0.81832
	SR	0.16435	0.18739	0.19822	0.11016	0.13454	0.04749	0.14703	0.29213	0.19648

表7：组合风险偏差预测稳定性检验（ $T=50$ ）
Table 7: Stability test of portfolio risk deviation prediction ($T=50$)

	等权重	I-LW	QIS	Gllasso	POET	DCC	poetDCC	DCAC	DCC-OHLC
NHCI	0.10306	0.00018	0.00020	0.00024	0.00028	0.01010	0.00059	0.03389	0.00007
上证50	0.00483	0.00120	0.00130	0.00137	0.00328	0.00070	0.00211	0.00813	0.00087
中证100	0.00082	0.00057	0.00509	0.00064	0.00133	0.00005	0.00079	0.02201	0.00062
沪深300	0.00004	0.00061	0.00125	0.00059	0.00086	0.00059	0.00071	0.01550	0.00036

表8：组合收益预测稳定性检验（ $T=150$ ）
Table 8: Stability test of portfolio return prediction ($T=150$)

		等权重	I-LW	QIS	Gllasso	POET	DCC	poetDCC	DCAC	DCC-OHLC
NHCI	AV	3.95321	3.92085	3.88901	3.88931	3.89221	3.84141	3.90572	3.57597	3.47681
	SD	4.46090	4.54572	4.60386	4.57761	4.65415	5.85242	4.88533	4.22581	4.25964
	IR	0.88619	0.86254	0.84473	0.84964	0.83629	0.65638	0.79948	0.84622	0.81622
	SR	0.34467	0.33112	0.32002	0.32192	0.31725	0.24361	0.30500	0.27457	0.24911
上证50	AV	5.63342	5.71814	5.74577	5.63352	5.99712	5.66276	5.54032	5.41972	4.62547
	SD	5.56690	6.02514	6.27589	6.48502	7.89466	5.48152	5.93485	5.17605	5.55745
	IR	1.01195	0.94905	0.91553	0.86870	0.75964	1.03306	0.93352	1.04708	0.83230
	SR	0.57801	0.54811	0.53061	0.49619	0.45365	0.59237	0.52649	0.58037	0.39762
中证100	AV	6.15572	6.22662	6.22611	6.17706	6.29077	6.63589	5.96055	5.56262	5.17472
	SD	6.14951	6.12871	6.09755	5.99338	7.34056	4.06715	5.90069	4.87056	5.36791
	IR	1.00101	1.01598	1.02108	1.03065	0.85699	1.63158	1.01014	1.14209	0.96401
	SR	0.60818	0.62182	0.62491	0.62759	0.52790	1.03763	0.60075	0.64611	0.51399
沪深300	AV	3.16179	3.00623	3.21916	2.90387	2.88240	3.06583	3.06143	2.93288	2.75381
	SD	5.03951	3.90996	7.09539	4.85133	4.58604	4.78131	4.64535	2.72713	3.21297
	IR	0.62740	0.76887	0.45370	0.59857	0.62852	0.64121	0.65903	1.07544	0.85709
	SR	0.14805	0.15103	0.11324	0.10063	0.10177	0.13597	0.13901	0.18964	0.10523

表9：组合风险偏差预测稳定性检验（T=150）
Table 9: Stability test of portfolio risk deviation prediction (T=150)

	等权重	I-LW	QIS	Glasso	POET	DCC	poetDCC	DCAC	DCC-OHLC
NHCI	0.11114	0.00010	0.00010	0.00012	0.00011	0.01039	0.00054	0.03333	0.00009
上证50	0.00469	0.00095	0.00098	0.00109	0.00420	0.00068	0.00199	0.00775	0.00093
中证100	0.00090	0.00037	0.00036	0.00049	0.00173	0.00005	0.00076	0.02184	0.00060
沪深300	0.00004	0.00056	0.00337	0.00056	0.00089	0.00056	0.00072	0.01706	0.00035

三、结束语

本文综合比较了无条件协方差矩阵估计和条件协方差矩阵估计在投资组合优化中的效果。研究发现，两类协方差矩阵估计在不同维度的数据集下表现出显著差异。对于低维情形，无条件协方差矩阵估计在组合收益与组合风险偏差方面均展现其明显优势。对于高维情形，条件协方差矩阵估计在上述两方面具有突出

性能。在两种不同维度情形下，条件协方差矩阵估计均拥有更稳定的组合收益预测。特别地，研究结果显示主成分方法与阈值化方法带来的稀疏性使无条件协方差矩阵估计在维度提升时仍可保留部分优势，且揭示了 DCAC 模型在尖峰情形下的超额收益能力得到提升。

在未来的工作中，可以考虑更高效的算法应用于协方差矩阵的估计中，以降低条件协方差矩阵估计面对高维数据时的计算压力。

参考文献

[1]ENGEL J, BUYDENS L, BLANCHET L. An overview of large-dimensional covariance and precision matrix estimators with applications in chemometrics[J]. Journal of Chemometrics, 2017, 31(4): e2880.

[2]SUN R, MA T, LIU S, et al. Improved covariance matrix estimation for portfolio risk measurement: a review[J]. Journal of Risk and Financial Management, 2019, 12(1): 48.

[3]LI D. Estimation of large dynamic covariance matrices: A selective review[J]. Econometrics and Statistics, 2024, 29: 16–30.

[4]LEDOIT O, WOLF M.A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2004, 88(2): 365–411.

[5]LEDOIT O, WOLF M. Nonlinear shrinkage estimation of large-dimensional covariance matrices[J]. The Annals of Statistics, 2012, 40(2): 1024–1060.

[6]ZHANG Y, TAO J Y, YIN Z X, et al. Improved large covariance matrix estimation based on efficient convex combination and its application in portfolio optimization[J]. Mathematics, 2022, 10(22): 4282.

[7]LEDOIT O, WOLF M. The power of (non-)linear shrinking: A review and guide to covariance matrix estimation[J]. Journal of Financial Econometrics, 2020, 20(1): 187–218.

[8]FAN J Q, FAN Y Y, LV J C. High dimensional covariance matrix estimation using a factor model[J]. Journal of Econometrics, 2008, 147(1): 186–197.

[9]FAN J Q, LIAO Y, MARTINA M. Large covariance estimation by thresholding principal orthogonal complements[J]. Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology, 2013, 75(4): 603–680.

[10] 杨小卜. 基于因子收缩方法的高维协方差估计 [J]. 数学的实践与认识, 2022, 52(10): 94–103.

[11]RUAN Y W, ZHANG X F, LIU Y J. A semi-parametric factor-GARCH model for high dimensional covariance matrix estimation[J]. Journal of the Korean Statistical Society, 2025: 1–32.

[12]FAN J Q, LIAO Y, LIU H. An overview of the estimation of large covariance and precision matrices[J]. The Econometrics Journal, 2016, 19(1): 1–32.

[13]ROTHMAN A J, LEVINA E, ZHU J.Generalized thresholding of large covariance matrices[J]. Journal of the American Statistical Association, 2009, 104(485): 177–186.

[14]XIAO Y H, LI P L, LU S. Sparse estimation of high-dimensional inverse covariance matrices with explicit eigenvalue constraints[J]. Journal of the Operations Research Society of China, 2021, 9: 543–568.

[15] 宋鹏, 胡永宏. 基于已实现协方差矩阵的高维金融资产投资组合应用 [J]. 统计与信息论坛, 2017, 32(08): 63–70.

[16] 王鑫, 孔令臣, 王力群. 高维协方差矩阵的估计问题 [J/OL]. 运筹学学报, 1–14[2025-05-30]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/31.1732.O1.20240202.1134.006.html>.

[17]ENGLE R. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models[J]. Journal of Business and Economic Statistics, 2002, 20(3): 339–350.

[18]FISZEDER P, FALDZINSKI M, MOLNAR P. Modeling and forecasting dynamic conditional correlations with opening, high, low, and closing prices[J]. Journal of Empirical Finance, 2023, 70: 308–321.

[19]JARJOUR R, CHAN K S.Dynamic conditional angular correlation[J]. Journal of Econometrics, 2020, 216(1): 137–150.

[20]SUN Z S, GAO X Y, LUO K Y, et al. Enhancing high-dimensional dynamic conditional angular correlation model based on garch family models: Comparative performance analysis for portfolio optimization[J]. Finance Research Letters, 2025, 75: 106808.

[21] 刘丽萍, 马丹, 白万平. 大维数据的动态条件协方差阵的估计及其应用 [J]. 统计研究, 2015, 32(6): 105–112.

[22] 刘进. 条件协方差矩阵的估计方法研究综述 [J]. 统计与决策, 2019, 35(23): 23–27.

[23]LEDOIT O, WOLF M. Shrinkage estimation of large covariance matrices: Keep it simple, statistician?[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2021, 186: 104796.

[24]FRIEDMAN J, HASTIE T, TIBSHIRANI R. Sparse inverse covariance estimation with the graphical lasso[J]. Biostatistics, 2008, 9(3): 432–441.

[25]ALEXANDER K, MEMMEL C. Estimating the global minimum variance portfolio[J]. Schmalenbach Business Review, 2006, 58: 332–348.

[26]DE NARD G, ENGLE R F, LEDOIT O, et al. Large dynamic covariance matrices: Enhancements based on intraday data[J]. Journal of Banking and Finance, 2022, 138: 106426.