基于波利亚解题理论的几何教学探索
——以一道中考试题为例

徐陈程，王煜阳，晋浩哲，杨舒倩
苏州工学院数学与统计学院，江苏 苏州 215500
DOI: 10.61369/RTED.2025100044

摘　　要： 本文在波利亚解题理论的基础上，以一道中考试题为例，进行几何教学实践。通过“回顾反思”环节对试题深入探究，培养学生的数学思维能力和核心素养。
关 键 词： 波利亚结题理论；中考；几何教学

Exploration of Geometry Teaching Based on Polya's Problem-Solving Theory —A Case Study of a Senior High School Entrance Examination Question

Xu Chencheng, Wang Yuyang, Jin Haozhe, Yang Shuqian
School of Mathematics and Statistics, Suzhou University of Technology, Suzhou, Jiangsu 215500

Abstract： Based on Polya's problem-solving theory, this paper conducts geometry teaching practice with a senior high school entrance examination question as an example. Through the "review and reflection" link, the question is explored in depth to cultivate students' mathematical thinking ability and core literacy.
Keywords： Polya's problem-solving theory; senior high school entrance examination; geometry teaching

引言

在2022年义务教育数学课程标准中，明确提出在初中阶段九大核心素养的主要表现。同时，几何教学对于培养学生的几何直观和空间观念及其重要。几何直观有助于学生理解抽象的数学概念，还有助于培养学生的洞察力，促使学生深层次思考，学生在学习中能够由点到面地看待问题。空间观念是学生应该具备的数学核心素养之一，是发展空间想象能力的重要基础。本文利用波利亚问题解决理论探索初中几何教学研究[1]。

几何教学不仅能培养学生的空间思维能力，还能培养学生的逻辑思维能力。平面几何题是最能体现出思维的开放性，其一题多解、从特殊到一般的特点能很好地锻炼学生的空间观念，逻辑推理能力，开拓学生的眼界，提升学生的数学素养[2,3]。

一、波利亚问题解决理论

波利亚解题理论描绘出解题理论的一个总体轮廓，也组成了一个完整的解题教学系统。既体现常识性，又体现由常识上升为理论的自觉努力。波利亚解题理论主要包括四个环节：了解问题所在、制定计划、执行计划、检查并展开。这四个环节并非是单方向的，可以任意往返，如图1所示。

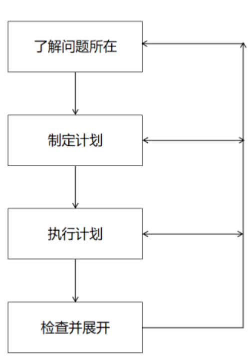

图1

极为重要的是第四步回顾反思。但学生在解题过程中往往忽略第四步，缺乏探究精神，无法更深入地理解问题。基于此，本文着重对波利亚解题理论中的第四步“回顾反思”进行探究，即：寻找两种及以上的解题方法；将题目进行一般化处理。

二、基于波利亚理论对几何数学问题的回顾反思

基于上述理论的研讨分析，波利亚理论的第四步总结回顾对于学生解决几何问题并且发展数学核心素养有着重要的作用。下面本文从一道中考几何数学题出发，重点研究回顾与反思环节[4]。

（2015 ·黑龙江省黑河市、齐齐哈尔市、大兴安岭）【8分】如图2，在正方形ABCD和正方形CGEF中，点B、C、G在同一条直线上，M是线段AE的中点，DM的延长线交于EF于点N，连接FM，易证：DM=FM，

DM⊥FM（无需写证明过程）

（1） 如 图3， 当 点B、C、F在 同 一 条 直 线 上，DM的 延 长 线 交EG于 点N， 其 余 条 件 不 变，试探究线段DM与FM有怎样的关系？请写出猜想，并给予证明；

（2）如图4，当点E、B、C在同一条直线上，DM的延长线交CE的延长线于点N，其余条件不变，探究线段DM与FM有着怎样的关系？请直接写出猜想。

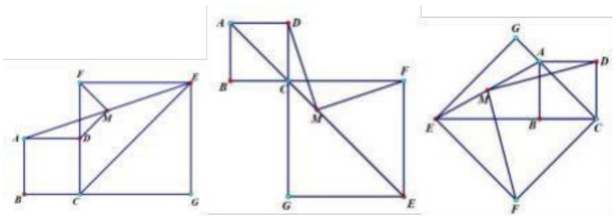

图2 图3 图4

这道中考试题的答案两小问的答案都是DM=FM且DM⊥FM，证明过程可查，也不是本文的研究重点，故在此不做列举。而本文重点在于回顾整个解题过程后，实现反思升华，深挖蕴藏于题目背后的数学本质，从而使学生更好地理解和掌握数学知识，强化发现、提出、分析和解决问题的能力。

回顾与反思一：将正方形CGEF绕点C顺时针旋转其他特殊角度，该结论是否依然成立？

通过分析这道中考试题的三张图发现，本题考察的图形的本质实际上是正方形CGEF在绕点从图2的初始状态做不同角度的旋转。图3是正方形CGEF绕点C顺时针旋转了90° ,图4是正方形CGEF绕点C顺时针旋转了225° ,那么自然会产生这样一个疑问：将正方形CGEF绕点C旋转至其他特殊角度，该结论是否依然成立？先考察正方形CGEF绕点C顺时针旋转45° 的情形。

下面给出简要证明思路：

如图5延长DM，使得其与CE交于点N，连接DF，FN

先证明ΔADM和ΔMNE全等，然后利用它证明ΔCDF和ΔNFE全等，得到ΔDFN是等腰直角三角形，且M是DN的中点，进而得FM=DM且DM⊥FM的结论。

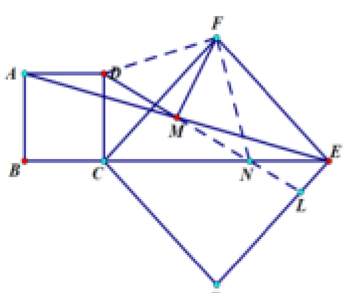

图5

回顾与反思二：将正方形CGEF绕点C任意旋转，该结论是否依然成立？

通过证明可以发现正方形CGEF绕点C顺时针旋转45° 的情形，该结论依旧成立，那么进一步地思考，将正方形CGEF绕点C任意旋转，该结论是否依然成立？要证明它只需要证明当顺时针旋转角度为α时，该结论依旧成立即可。如图6取AC，CE的中点K，L，连接KM，DK，ML，FL，再做MR⊥CE。先证明四边形KMLC是平行四边形，接着应用平行四边形KMLC的性质来证明ΔDMK和ΔMLF全等，从而得到DM=MF。再利用ΔDMK和ΔMLF全等进行角的等量转化以及MR⊥CE，得到∠DMF=90° ，从而证明DM⊥MF。

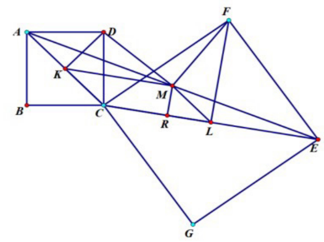

图6

回顾与反思三：点M的轨迹是什么？

在任意旋转正方形CGEF的过程中，注意到点M似乎在某个轨迹上运动。那么能否证明呢？

预设点M轨迹是圆。证明过程如下所示：

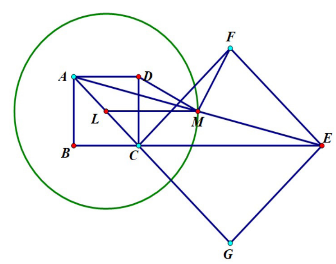

图7

如图7取AC中点L，连接LM∵L，M分别是AC，AE中点

∴LM是ΔACE的中位线

∴LM=1/2CE

在大正方形旋转过程中，L点为定点，M点为动点，LM长度因CE长度不变而不变，

因此，M是在以L为圆心，LM为半径的圆上。

三、几点反思

（一）引导学生理解运用波利亚“怎样解题”表

“怎样解题”表的4个步骤和程序组成了一个完善的解题教学程序，当学生按照波利亚“怎样解题”表进行解体时，能打开学生思路，让学生有所启发，愿意继续思考下去，这样很多问题都能迎刃而解。同时也可纠正学生遇到不熟悉或者难题时就不认真分析思考，盲目推理的坏习惯。最终培养了学生独立解体的能力，提高学生的数学思维能力。我们要加深学生对“怎样解题”表的理解和运用[5]。

（二）加强学生的问题回顾与反思意识

问题回顾与反思是学好数学的本质环节，然后现如今的中学生大多浮于表面，草草做完题目，没有深入思考是否能用不同的方法求解，是否能改成变式。我们要引领学生深入思考问题，挖掘题目背后的内涵，从而让学生自我启发，总结经验，培养学生对数学的浓厚兴趣，最终更好地提高学生的基础知识、基本技能、

 |

基本思想、基本活动经验，以及发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的能力，并提高学生的推理意识和创新能力[6]。

四、在几何教学中运用波利亚解题理论的有效实践路径

（一）以四环节为框架搭建阶梯式教学流程

波利亚解题理论的“了解问题、制定计划、执行计划、检查并展开”四环节，能够为几何教学提供更加具有结构化的思维路径。在教学过程中需要把这一理论转化成为具体可操作的阶梯式教学方法，不断引导学生形成相关的逻辑思维。在了解问题的阶段，教师可以将重点放在聚焦几何图形的本质拆解上。比如针对含正方形的几何问题，可以引导学生通过“标注—关联”法提取关键信息：先标注已知条件（如正方形边长相等、直角属性），再关联图形隐含性质（如公共顶点C的旋转关系、中点M的中位线联想），将文字描述转化为几何语言（如“延长线交于N”转化为“共线关系”），帮助学生建立“条件—图形”的对应认知。而在制定计划阶段则需要侧重引发学生产生联想并选择合适的策略[9]。教师可以通过问题链来激发学生的旧知关联，例如“证明线段相等和垂直可借助哪些工具？”（全等三角形、等腰直角三角形），引导学生提出多种思路（如全等证明或坐标计），并通过小组讨论分析来，让他们自行探讨可行性，最终培养学生的策略意识。在执行计划时教师需要更加关注到学生推理的严谨性。要求学生以“分步书写＋理由标注”规范过程，每一步推理均注明依据（如“由正方形性质得 AB=CD”），复杂步骤可先用思维导图梳理逻辑链，避免跳步。最后在“检查并展开”环节则需要学生通过即时验证（如度量工具检验）和简单变式（如改变边长），为他们后续的反思做好铺垫。

（二）以理论教学为基础强化回顾与反思教学

波利亚解体理论中的检查并展开环节能够帮助教师和学生回顾整个教学过程并引起他们的反思，同时这也能够将解题过程转化为思维培养的过程。在具体的教学实践过程中，教师需要打破传统教学模式中以解题为主要目的的教学理念，进一步优化回顾与反思环节，从多个角度设计相关的探究活动，保证反思环节的有效性。从教学实施的角度来看，教师可以通过引导学生建立方法迁移的意识来从多个角度检验自身的学习成果[7]。比如大学生完成基础解题之后，教师可以通过提问的方式来让他们思考能否通过其他思路来推导出相关结论，以此来推动学生将不同的知识模块进行串联。这种以一题多解为主要形式的反思过程，与传统教学中追求不同的解法数量有本质的区别。它能够让学生在对比其他解法的过程中理解不同知识之间的内在联系，从而不断强化学生主动构建知识网络的思维习惯，这与波利亚理论中通过反思打通思维节点的理念也是十分契合的[8]。另外教师也要关注到从特殊到一般的拓展教学。比如试题中正方形旋转的不同情形，倒是可以以这一种情况为基础来引导学生思考图形变化中不变的本质是什么，以此来引发学生进行自主探究，使他们认识到旋转任意角度下结论的稳定性，这种更加具有实践性的学习过程也能够让学生体会到特殊案例是一般规律的具象化这一思维模式，也能够有效培养他们的抽象概括能力。这种实践既符合几何教学中“以具体图形为载体、以规律探究为核心”的特点，又能落实核心素养中“逻辑推理”“直观想象”的培养要求。最后，学生也需要关注到问题背后所存在的数学本质。这就需要教师带领学生分析动点，轨迹等更加深层次的问题，让学生能够认识到几何问题的核心，而并不是指简单的理解表面图形的形式。这种教学设计方式也和波利亚理论中的“回顾反思是解题本质环”相匹配，从而能够有效帮助学生从掌握一道题逐渐转变成为理解一类问题，最终实现学生数学思维与核心素养的双重提升[10]。

五、结论

总之在波利亚解题理论的引导下，结合，对于具体结合教学考试试题的深入分析，能够验证这一理论在初中几何教学中的有效性。而通过带领学生进行一题多解探究，并使他们参与从特殊到一般的变式拓展实践，能够有效突破传统教学模式中就题解题的思维局限。并且通过动点轨迹分析等反思活动也可以帮助教师检验自身教学的成果。这种教学模式不仅能够帮助学生把握几何问题的本质，强化他们知识关联与思维迁移的能力，还能够有效提升学生的逻辑推理能力，为他们未来的发展打下坚实的基础。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部定制 . 义务教育数学课程标准（2022 年版）.

[2] 崔春红 . 初中数学教学中几何直观能力培养探析 [J]. 数理化解题研究 ,2024,(29):11-13.

[3] 张露 . 初中生数学空间观念情境性测评研究 [D]. 江南大学 ,2023.

[4] 李香 , 杨新芳 , 杨斐 . 试论在初中数学几何教学中培养”学生空间思维能力”的策略 [J]. 中国多媒体与网络教学学报 (下旬刊),2023,(08):80-83.

[5] 严萍 . 初中几何教学中培养学生逻辑思维能力的策略 [J]. 数理化解题研究 ,2022,(05):26-28.

[6] 黄辉煌 . 图形与几何教学中培养学生推理能力的策略 [J]. 数学学习与研究 ,2021,(09):47-48.

[7] 徐杨 . 波利亚”怎样解题表”在初中平面几何教学中的运用 [D]. 华中师范大学 ,2021.

[8] 杨璐 . 基于波利亚解题思想的 GeoGebra 工具下高考立体几何题的案例分析 [D]. 宁夏师范学院 ,2021.

[9] 苏子璇 . 基于波利亚解题理论的初中”图形与几何”解题教学研究 [D]. 新疆师范大学 ,2020.

[10] 韩明月 . 基于波利亚解题思想的高中立体几何解题教学研究 [D]. 辽宁师范大学 ,2020.

