运输问题中关于退化解产生的原因和求解策略

郭辉，李肖倩，包倩
河南工业大学数学与统计学院，河南 郑州 450001

DOI:10.61369/ETI.2025080043

摘　　要： 运输问题是针对生产与需求之间的关系，如何使供应链可以高效率低成本地进行与控制的一种特殊的线性规划问题。由于货物运输是现代物流系统中不可或缺的一环，运输问题的解答对于提升运输时效性以及成本具有重要意义。然而在运输问题的求解过程中，退化解的产生可能会影响问题的求解。对于退化解产生的原因以及如何求解，只有少量文献进行了说明。本文主要归纳总结了运输问题中退化情况及其产生的原因，根据退化解出现的位置不同给出了不同的解决方法，并且基于一个具体的运输问题实例比较了当退化解为初始解时各种“0”元添加方法的优劣性。本文的结论对于运输问题的求解、教学以及应用研究都具有一定的指导意义。

关 键 词： 运输问题；退化解；单纯形法；表上作业法

The Causes and Solution Strategies of Regression and Resolution in Transportation Problems

Guo Hui, Li Xiaoqian, Bao Qian
School of Mathematics and Statistics, Henan University of Technology, Zhengzhou, Henan 450001

Abstract: The transportation problem is a special kind of linear programming problem that focuses on the relationship between production and demand and how to make the supply chain operate and be controlled efficiently and at a low cost. As goods transportation is an indispensable part of the modern logistics system, solving transportation problems is of great significance for improving the timeliness and cost of transportation. However, in the process of solving transportation problems, the occurrence of regression may affect the solution of the problem. Only a few literatures have provided explanations on the causes of regression resolution and how to solve it. This article mainly summarizes the degradation situations and their causes in transportation problems. Different solutions are provided based on the different locations where the degradation occurs. Moreover, based on a specific transportation problem example, the advantages and disadvantages of various "0" element addition methods when the degradation is the initial solution are compared. The conclusion of this paper has certain guiding significance for the solution, teaching and applied research of transportation problems.

Keywords: transportation issues; retreat and resolve; simplex method; the method of working on the table

引言

线性规划求解时，有时会出现基变量等于零的情况，称之为退化或退化解。退化解可出现在初始解、中间解或最优解各种情况 [1]。运输问题作为一种特殊的线性规划问题，通过表上作业法进行求解时，也会出现退化的情形。

当在确定初始基可行解的过程中出现退化时，则需要添加“0”元素，以此来维持基变量的个数为个，但是对于“0”元的添加位置，并没有一个确定的答案。教材 [2] 指出，原则上“0”元可以添加在同时划去的那行和那列的任意未填入运量的数字格，但是为了减少调整次数，可将“0”添加在那行和那列中运价最小的数字格内。唐文广等认为为了避免用闭回路法求检验数时某些空格找不到闭回路，所以“0”元应当添加在那行或那列不与其他运量格构成闭合回路的空格内 [3]。但是丁龙等认为，虽然文献 [3] 中的方法具有很大的合理性，并且能够解决大部分的运输问题，但是仍然会出现“无法得到最优解”或者“调整计算量增大”的问题。所以，文献 [4] 给出了一种改进方法，即“0”元应当添加在那行或那列不与其他运量格构成闭合回路且运价最小的的空格内 [4]。唐四云在文献 [5] 中指出应选择被划去的该行和该列当中差额最大的，在此方向上找一未划去或未填运量的格（对应运价最小）填0，并对该方法给出一个较合理的解释。

本文首先说明了出现退化的原因，然后针对不同位置的退化解讨论退化解的求解策略，针对初始退化解的“0”元添加问题，基于一个运输问题实例，分别用教材 [2] 和文献 [4-5] 给出的方法添加“0”元，发现针对该例题，教材 [2] 和文献 [4] 的方法会使得最优解误判，只有文献 [5] 中的方法能够准确快速的求出最优解并利用 Lingo 进行了求解验证。

项目信息：河南工业大学2024年研究性教学课程建设项目资助，项目号2024YJXJX-33，河南省高等教育教学改革研究与实践项目，项目号：2023SJGLX173Y。

作者简介：郭辉，（1980.06-），女，河南郑州，汉族，学历：博士，职称：副教授，研究方向：向量优化理论及应用。

一、退化情况产生的原因

运输规划作为线性规划的一个特定类型，其建模过程具有独特的性质。在构建初始基时，通常采用三种经典方法：西北角法、最小元素法以及 *Vogel* 法。该问题的求解关键在于确定一组基变量 $\{x_{ij}\}$，这一过程通过表格操作实现。具体而言，需要在表格中采用画圈标记的方式，每标记一个数值后，需同步调整对应行的供给量和列的需求量，并完成行或列的删除操作。值得注意的是，整个操作过程需确保最终标记的圆圈数量满足 $m+n-1$ 的条件。此外，在求解过程中可能出现退化现象，这种现象主要源于两种典型情形：

（1）在计算过程中有时会出现填入一个画圈的数时，使行和列同时达到饱和，这时出现了既划去一行也划去了一列的情形，造成了基变量的数目小于 $m+n-1$ 个，从而产生了退化解 [6]。

（2）在运用表上作业法执行单纯形法迭代的过程中，某一闭合回路内的多个偶数格均出现相同的最小值。经过迭代，换入基变量为一个，而换出的基变量的个数超过一个，导致退化解的产生 [6]。

二、退化情况的求解策略

退化的情况主要分为初始解、中间解和最终解出现退化的三种情况，由于最终解已经求解完毕，所以下面分退化解为初始解和退化解为中间解介绍求解的策略。

（一）初始解出现退化解的情况

当初始基可行解为退化解时，需要添一个“0”元。针对前面提到的“0”元的不同添加方法，我们利用下面的一个产销平衡的运输问题，来简单比较一下各种添加方法之间的优劣性。

例1 有三个产地 A_1，A_2，A_3，四个销地 B_1，B_2，B_3，B_4，各产地的供应量与销地的需求量如表1所示。确定总成本最低的物资调运方案。

表1

					产量
	2	6	5	3	6
	1	3	2	1	2
	3	2	7	4	2
销量	3	3	2	2	

解：用 *Vogel* 法求得初始方案如下表2. 本例单位运价 Cy, i=1,2,3,

此时的初始解为退化解。这是由于在用 *Vogel* 法求初始解的过程中，当在 A_2B_3 数字格填入运量2后，由于 A_2 行的产量等于 B_3 列的销量，需要同时划去 A_2 行和 B_3 列，导致基变量的个数变成了5个。为了保证基变量的个数为6个，需要在 A_2 行或 B_3 列未填入运量的数字格添加“0”元。

若采用教材 [2] 的方法将“0”元素填入 A_2B_1 所对应的数字格。此时采用位势法可判断表2中的方案并非最优方案。因为，检验数 σ_{22}=−2，σ_{24}=−1，表2还需要进行迭代才能变成最优方案。但是事实上此时的基可行解已经为最优解，因此出现了最优解误判的情况，并且使得调整计算量增大。若采用文献 [4] 的方法，此时“0”元的添加位置仍可为 A_2B_1 所对应的数字格，因此仍然会出现前面所说的问题。但是如果采用文献 [5] 的方法将“0”元素填入 A_1B_3 所对应的数字格，可得初始方案如下表3

采用位势法可判断出，表3给出的初始方案是最优方案。

表2

					产量
	3	1		2	6
	[0]		2		2
		2			2
销量	3	3	2	2	

表3

					产量
	3	1	[0]	2	6
			2		2
		2			2
销量	3	3	2	2	

最后，利用 Lingo 验证所得最优方案是否正确，计算结果如图1所示

```
Lingo Model - Lingo1
sets:
supplys/1..3/: S;
demands/1..4/: D;
links(supplys, demands): c, x;
endsets
data:
S = 6,2,2;
D = 3,3,2,2;
c = 2  6  5  3
    1  3  2  1
    3  2  7  4;
enddata
min = @sum(links(i,j): c(i,j) * x(i,j));
@for(supplys(i): @sum(demands(j): x(i,j)) = S(i));
@for(demands(j): @sum(supplys(i): x(i,j)) = D(j));

X( 1, 1)    3.000000    0.000000
X( 1, 2)    1.000000    0.000000
X( 1, 3)    0.000000    0.000000
X( 1, 4)    2.000000    0.000000
X( 2, 1)    0.000000    2.000000
X( 2, 2)    0.000000    0.000000
X( 2, 3)    2.000000    0.000000
X( 2, 4)    0.000000    1.000000
X( 3, 1)    0.000000    5.000000
X( 3, 2)    2.000000    0.000000
X( 3, 3)    0.000000    6.000000
X( 3, 4)    0.000000    5.000000
```

图1 利用 Lingo 计算例1的计算结果

研究表明，退化情形下填入“0”元素的位置选择将显著影响被删除行和列中剩余未分配格子的检验数计算。通过闭回路法的分析验证，文献 [2] 提出的方法具有理论依据：当已确定运量的数字格所对应的单位运价恰好是被删除行和列的最小值时，该方法至少能够为（被划去的该行和该列的）其它未填入数字的格在求检验数时，在其闭回路的该行或该列方向上提供正值。为了使提供的正值尽可能大，需要综合考虑被删除行和列的差额指标。具体而言，应当比较行差额和列差额的数值，选择差额较大者作为基准方向，并在该方向上寻找未被划去且运价最小的格子填入“0”[5]。以本案例为例，在确定 A_2 至 B_3 的运输量为2后出现退化情况，需要同时删除 A_2 行和 B_3 列，其对应的罚数分别为1和3。由于列罚数较大，故选择在 A_1B_3 位置填入“0”，最终获得的运输方案经检验确为最优解。

（二）中间解出现退化解的情况

在运用闭回路法进行方案调整时，若某一闭合回路的偶数格

位置同时存在多个相等的最小数值，则会产生特殊情形。经过迭代运算后，虽然仅有一个变量进入基，但需要替换的基变量数量却超过一个，这种情况将不可避免地引发退化现象。为确保基变量数量严格符合 $m+n-1$ 的要求，必须遵循“一进一出”的基本准则来处理此类问题。例如下面的一个产销平衡的运输问题：

例2 有三个产地 A_1，A_2，A_3，四个销地 B_1，B_2，B_3，B_4，产销量见表4，确定最优调运方案。

表4

					产量
	2	3	4	5	10
	3	2	5	6	12
	4	3	6	8	8
销量	6	8	7	9	

解：首先用最小元素法确定初始基可行解如下表5。

此时基变量个数为6，未出现退化解，再采用位势法求非基变量的检验数，得 σ_{32}=-2，，因此上述初始基可行解不是最优解，进而采用闭回路法进行换基迭代。但在调整过程中，发现在以 A_3B_2 为起始点的闭回路 $A_3B_2 \to A_2B_2 \to A_2B_4 \to A_3B_4 \to A_3B_2 \to$ 中，偶数格 A_2B_2 和 A_3B_4 中出现了相同的最小数值8，因此迭代过程出现了退化。此时，我们采用“一进一出”的原则进行调整，将 A_3B_2 作为基变量，A_2B_2 为非基变量，A_3B_4 的位置补“0”以保证基变量的个数保持6个不变。得到新的基可行解后，继续按照上述步骤进行最优解判别、换基迭代，直至得到最优解。如下表6

表5							表6					
					产量							产量
	6		4		10					1	9	10
		8	3	1	12			6		6		12
				8	8				8		[0]	8
销量	6	8	7	9			销量	6	8	7	9	

三、结语

本文主梳理总结了运输问题中退化情况产生的原因以及求解策略，特别是针对退化解为初始解的情况，给出了一个实例，分别采用教材 [2]、文献 [4][5] 的方法进行求解，来比较它们的优劣性，结果表明针对本文例题，文献 [5] 的方法是最优的。需要注意的是，此时文献 [5] 的方法所表现出来的最优性，仅仅是针对本文所给例子，是否存在其它的例子导致文献 [4] 的方法比文献 [5] 更有效仍需要进一步探索。事实上，无论是哪一种方法都能解决绝大多数的运输问题，只是调整次数不同而已，因此，在具体的教学中，采用任一种方法均可进行求解。

参考文献

[1] 张汉斌 . 线性规划退化解的进一步讨论 [J]. 邢台职业技术学院学报 ,2006,(03):54-56.

[2]《运筹学》教材编写组 . 运筹学 [M]. 北京：清华大学出版社，2012:78 -110.

[3] 唐文广，吴振奎，王全文，等 . 运输问题的退化解及表解中0元的添加 [J]. 数学的实践与认识 ,2009,39(01):160-166.

[4] 丁龙，付小连，吴珊，等 . 运输问题出现退化解时0元添加的改进方法 [J]. 价值工程 ,2014,33(02).

[5] 唐四云 . 运输问题表上作业法中初始方案的改进 [J]. 广东技术师范学院学报 ,2016,37(05).

[6] 黄宇林 . 运输规划问题退化解产生的原因及求解策略 [J]. 新乡师范高等专科学校学报 ,2005,(05):9-10.

 |