初探泰勒级数与幂级数之间的关系

郭辉，李巧利，张佳美

河南工业大学数学与统计学院，河南 郑州 450001

DOI:10.61369/EDTR.20240120004

摘 要： 本文讨论了幂级数在什么条件下是泰勒级数，不同函数是否可以展开为同一个泰勒级数以及一个函数的泰勒级数展开式是否一定收敛于原函数等问题，并利用MATLAB演示了函数的泰勒级数展开并通过作图说明了不同的函数可展开为同一个泰勒级数的情形。本文对泰勒级数与幂级数之间关系的及其应用的深入理解具有指导意义，对泰勒级数和幂级数的教学也有一定的参考意义。

关 键 词： 泰勒级数；泰勒公式；幂级数；MATLAB

An Initial Exploration of the Relationship Between Taylor Series and Power Series

Guo Hui, Li Qiaoli, Zhang Jiamei

School of Mathematics and Statistics, Henan University of Technology, Zhengzhou, Henan 450001

Abstract: This paper discusses under what conditions a power series is a Taylor series, whether different functions can be expanded into the same Taylor series, and whether the Taylor series expansion of a function necessarily converges to the original function. It also utilizes MATLAB to demonstrate the Taylor series expansion of functions and illustrates, through graphical representations, scenarios where different functions can be expanded into the same Taylor series. This paper provides guidance for a deeper understanding of the relationship between Taylor series and power series and their applications, and also offers certain reference value for the teaching of Taylor series and power series.

Keywords: **Taylor series; Taylor formula; power series; MATLAB**

引言

由于泰勒级数与幂级数有着逐项求导、逐项可积、一致收敛等良好的性质，所以在微分方程解法、概率、函数值的近似计算等实际问题中有着广泛的应用。很多学者研究了泰勒级数和幂级数，如张宇涵等利用对延迟系统中具有延迟项的泰勒级数展开对动力学模型的关节空间轨迹跟踪的控制问题进行预测逼近[1]，孟献青研究了幂级数的和函数在求数列极限、积分中的应用[2]。我们知道泰勒级数都是幂级数，然而并不是所有的幂级数都是泰勒级数，汪训洋等通过对泰勒公式与泰勒级数定义的分析和各自在科学计算中的不同作用讨论了两者的不同[3]，王从徐讨论了函数展开成泰勒级数的方法与应用[4]，潘嵘讨论了幂级数的性质与应用[5]。然而，目前对泰勒级数与幂级数关系的深入探讨并没有明确给出。

本文根据幂级数与泰勒级数的相关定理与性质，探讨了两种级数的联系与区别，讨论了幂级数在什么条件下是泰勒级数、不同函数展开为同一泰勒级数以及一个函数的泰勒级数展开不一定收敛于原函数的相关结论；并利用MATLAB演示了函数的泰勒级数的展开且通过作图说明了不同的函数可展开为同一个泰勒级数的理论。

一、基本概念及理论

定义2.1[6] 由幂函数序列 $\{a_n(x-x_0)^n\}$ 所产生的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \quad (1)$$

称为幂级数。

定义2.2[6] 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在任意阶导数，则称级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \quad (2)$$

为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数。

定义2.3[6] 若函数 $f(x)$ 处存在直至n阶导数，则，$f(x)=T_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right)$ 即

基金项目：河南工业大学理学院教研项目（编号：lxyjy202405，lxyjy202414）河南工业大学高层次人才科研启动项目（BS2019024）。

作者简介：郭辉（1980.06-），女，汉族，河南省郑州市人，博士，副教授，研究方向：量优化理论及应用。

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right). \qquad (3)$$

（3）式称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒公式，$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$ 称为泰勒公式的余项。

定理2.1[6] 若函数 $f(x)$ 为幂函数（1）在点 $x=x_0$ 某邻域上的和函数，则幂级数（1）的系数与函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的各阶导数有如下关系：$a_0=f(x_0),\qquad a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(n=1,2,\cdots)$.

二、泰勒级数与幂级数的区别

泰勒级数与幂级数在构造与使用上存在差异。由泰勒级数的定义可知，它是围绕一个特定的点展开，用于逼近该点附近函数的值，通常用于分析函数在其展开点附近的性质，比如函数的值、导数值、积分值等。幂级数是一类最简单的函数项级数，其构造不需要考虑函数的导数，而是直接根据函数的性质或者问题的需求来确定系数，通常应用于解决各种数学问题，如微分方程、积分方程、级数求和等。从形式上看，它们的主要区别在于系数，幂级数的系数通常为常数，而泰勒级数的系数恰好是函数在展开点处的各阶导数与相应阶乘的商。泰勒级数关注的是函数在某一点附近的精确行为，特别是导数和极值，而幂级数则是用来描述函数在整个实数轴上的整体特性。

泰勒级数与幂级数在收敛性上进行比较，泰勒级数是以某一点为中心，通过函数的各阶导数来构建的级数。它的收敛性依赖于函数在该点的光滑性，即函数具有高阶导数的阶数足够高。然而，泰勒级数的收敛范围通常局限于中心点附近的一个小区间内，超出这个范围，级数可能不再收敛。幂级数的收敛性质则更为复杂，其收敛范围通常不局限于某一点附近，而是可以在更大的区域内收敛。幂级数的一个重要特性是它们往往趋于发散，这意味着随着自变量的增大，级数不会趋向于任何特定的数值。

三、泰勒级数与幂级数的联系

泰勒级数是幂级数的特殊情况，泰勒级数都是幂级数，但是并不是每一个幂级数都是泰勒级数，定理4.1讨论了幂级数在什么情况下是泰勒级数。

定理4.1 若一个幂级数的收敛半径不为零，则至少存在一个函数 $f(x)$，使得 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒级数就是该幂级数。

证明：对于任意一个收敛半径不为零的幂级数，不妨设该幂级数的形式为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，则在收敛半径之内，该幂级数一定收敛于某一个函数 $f(x)$，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad (4)$$

由幂级数的逐项求导性质以及定理2.1可知，该幂级数的系数为 $a_0=f(x_0),a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(n=1,2,\cdots)$，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \qquad (5)$$

下面根据泰勒级数与幂级数的部分性质，讨论函数展开的泰勒级数不一定收敛于原函数的理论以及不同函数可展开为同一泰勒级数的理论，并分析总结这些函数的共同点。在点 x_0 处具有任意阶导数的函数可展开为泰勒级数，但展开的泰勒级数在收敛域内并不一定收敛于该函数。这可能发生在以下几种情况：

1.发散的收敛半径：泰勒级数的收敛性与收敛半径有关。如果泰勒级数的收敛半径小于我们关心的范围，那么级数在该范围内可能不收敛于原函数。

2.函数的奇点：如果函数在展开点附近存在奇点（如无穷大或不连续点），则泰勒级数可能无法正确收敛。

3.函数的震荡性质：对于某些震荡的函数，泰勒级数可能会在一些点上发散。

在使用泰勒级数逼近函数时，必须谨慎选择展开点和确保收敛条件。如果函数在展开点附近具有较好的光滑性并且泰勒级数的收敛半径足够大，那么泰勒级数通常会较好地逼近原函数。如果 $f(x)$ 在点 x_0 处具有各阶导数，那么泰勒级数能否在某个区间内收敛，是否收敛于 $f(x)$ 仍需验证。幂级数在收敛域内收敛于一个函数的充要条件为该函数在点 x_0 处的泰勒公式的余项的极限为零。

下面给出一个函数展开的泰勒级数不收敛于原函数的例子。

例 1 函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处有任意阶导数且 $f^{(n)}(0)=0$，所以函数在 $x=0$ 处的泰勒级数 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots=0$，其中 x 属于0的某邻域。显然该级数不收敛到函数本身，因为在非零处，函数为 $e^{-\frac{1}{x^2}}$。

下面，本文构造出两个例子说明多个函数在一点处的泰勒展式可能为同一个收敛半径不为零的幂级数。

例 2 设函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^4}}+c, & x\neq 0.\\ c, & x=0.\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}+c, & x\neq 0.\\ c, & x=0.\end{cases}$$（c 为任意常数项）

可知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续可导，且 $x=0$ 点处任意阶导数均存在，故两者均可在 $x=0$ 处展开为泰勒级数。由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的各阶导数为：$f(0)=c$，$f^{(n)}(0)=0$。因此，该函数在 $x=0$ 处的泰勒级数展开为 $f(c)+f'(c)x+\frac{f''(c)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n+\cdots=c+0+0+\cdots=c$.同理可得，函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数展开为

$g(c)+g'(c)x+\frac{g''(c)}{2!}x^2+\cdots+\frac{g^{(n)}(c)}{n!}x^n+\cdots=c+0+0+\cdots+\cdots=c$.由此可见，一个或多个函数在某个点 x_0 处的泰勒展开可能为同一个幂级数，但这个幂级数不收敛于该函数。

例 3 设函数 $r(x)=\begin{cases}-1, & x\leq -\frac{\pi}{2}\\ \sin x, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 1, & x\geq\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ 易验证，函数在 $r(x)$ 在 $x=0$ 处任意阶可导，可得该函数在 $x=0$ 可进行泰勒级数展开为

$$\begin{aligned}r(x)&=r(0)+r'(0)x+\frac{r''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{r^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\\&=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sin x\end{aligned}$$

因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的收敛半径为 $(-\infty,+\infty)$，且在 $(-\infty,+\infty)$ 中，$\sin x$ 与 $r(x)$ 不相等，所以由不同函数展开所得的幂级数可能是相同的。

泰勒级数可以用于表示不同的函数，当两个函数在某个点及其各阶导数相等时，它们在这一点的泰勒级数是相同的。虽然一个收敛半径不为零的幂级数可能由不同的函数进行泰勒级数展开

得到，但是这些函数有一个共同点，如下面定理所示：

定理4.2若一个收敛半径不为零的幂级数可由多个不同的函数在 $x=x_0$ 处进行泰勒展开，则存在一个实数 $\delta>0$，使得这些函数在区域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上完全相同。

证明：（只证明两个不同函数的情况）设函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在点 x_0 处展开的泰勒级数相同，即函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在点 x_0 处的各阶导数值相同，则分别将函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在点 x_0 处进行泰勒公式展开，展开结果为：

$$f_1(x)=f_1(x_0)+f_1'(x_0)(x-x_0)+\frac{f_1''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f_1^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)+R_1(x) \quad (6)$$

$$f_2(x)=f_2(x_0)+f_2'(x_0)(x-x_0)+\frac{f_2''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f_2^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)+R_2(x) \quad (7)$$

其中 $R_1(x)$ 与 $R_2(x)$ 分别为函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的余项，$R_1(x)$ 与 $R_2(x)$ 均为 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小量。

将函数（6）减去函数（7）可得：$f_1(x)-f_2(x)=R_1(x)-R_2(x)$，由无穷小量的性质：无穷小量与无穷小量的加、减、乘仍为无穷小量可知，$R_1(x)-R_2(x)$ 仍为无穷小量，所以可得：对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时，有 $|f_1(x)-f_2(x)-0|=|R_1(x)-R_2(x)-0|<\varepsilon$ 成立。因为 ε 的任意性，所以可得在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内，$f_1(x)=f_2(x)$ 成立。

四、图像的演示和比较

通过MATLAB演示函数的泰勒级数展开，并通过作图比较分析不同阶次泰勒多项式对原函数的逼近效果。

考虑函数 $y=\tan x$ 的泰勒展开，分别作出函数 $y=\tan x$ 与其前n项（n取5、10、20、50）构成的泰勒多项式函数 y_1、y_2、y_3、y_4 在给定点 $x_0=0$ 处的邻域 $[-1.5,1.5]$（$\delta=1.5$）上的图像，其中函数 $y=\tan x$ 用蓝色的实线表示，各项泰勒多项式函数用红色的双画线表示。原函数与函数 y_2、函数 y_3 的图像如下：

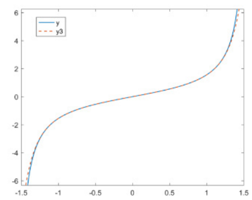

图1 $\tan x$ 与函数 y_2 的趋近图

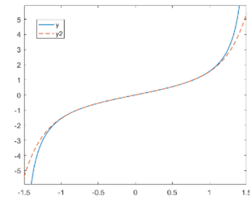

图2 $\tan x$ 与函数 y_3 的趋近图

观察并比较图1与图2可以发现原函数的各阶泰勒级数部分和函数的图像在展开点附近的区域都能够较好地逼近原函数，而且随着阶数的增加，图像越来越逼近原函数图像，误差也相对较小。

五、结论

本文通过对泰勒级数与幂级数的部分性质进行分析，研究了泰勒级数与幂级数的区别与联系，讨论了不同函数可展开为同一泰勒级数的理论以及函数展开的泰勒级数不一定收敛于原函数的理论，并利用MATLAB演示了函数的泰勒级数的展开并作图说明了不同的函数可展开为同一个泰勒级数的理论。

参考文献

[1] 张宇涵，于潇雁，陈力.基于泰勒级数的空间机器人时延神经网络控制[J].福州大学学报(自然科学版),2022,50(03):351-358.
[2] 孟献青.幂级数和函数的求法及应用[J].山西大同大学学报(自然科学版),2021,37(06):8-11.
[3] 汪训洋，张鹏展.泰勒公式与泰勒级数的比较教学[J].数学学习与研究,2016(22):13-14.
[4] 王从徐.基于泰勒级数展开及其应用探讨[J].红河学院学报,2021,19(02):154-156.
[5] 潘嵘.幂级数和函数的应用[J].沧州师范学院学报,2020,36(02):69-72+78.
[6] 华东师范大学数学科学学院.数学分析：上册[M].5版.北京：高等教育出版社,2019:137-142.

 |