“数列不等式之裂项放缩”复习课的微设计

蒋丰盈[1]，余敏[2]，唐靖[1]
1. 怀化学院 数学与计算科学学院，湖南 怀化 418008
2. 怀化市第三中学，湖南 怀化 418008
DOI: 10.61369/ETR.2025340044

摘　　要： 数列与不等式在高中数学中占有举足轻重的地位，数列中的不等式问题更是高考常见的数列考查形式，裂项放缩法是解决数列不等式问题的重要方法之一．笔者围绕“数列不等式之裂项放缩”复习课进行了微设计，从简单熟悉的问题出发，由浅入深，循序渐进，使裂项放缩法有迹可循，提升学生的解题能力，进而发展数学核心素养。

关 键 词： 数列；不等式；裂项相消；放缩；微设计

Micro design of the review lesson on "Splitting and Shrinking Terms in Sequence Inequality"

Jiang Fengying[1], Yu Min[2], Tang Jing[1]
1.School of Mathematics and Computational Science, Huaihua University, Huaihua, Hunan 418008
2.Huaihua Third Middle School, Huaihua, Hunan 418008

Abstract: Sequence and inequality play a crucial role in high school mathematics, and inequality problems in sequences are a common form of sequence examination in the college entrance examination. The splitting and scaling method is one of the important methods for solving sequence inequality problems The author has conducted a micro design around the review lesson of "Splitting and Shrinking of Sequence Inequality", starting from simple and familiar problems, gradually progressing from shallow to deep, making the splitting and shrinking method traceable, improving students' problem-solving ability, and further developing their mathematical core literacy.

Keywords: sequence; inequality; split term cancellation; shrinking and shrinking; micro design

数列与不等式一直在高中数学中占有举足轻重的地位，数列中的不等式问题中更是高考常见的数列考查形式[1][3][5-7]. 这类问题往往具有较高的综合性和思维深度，主要考查学生的逻辑推理能力、数学运算素养以及转化与化归的数学思想方法．解决此类问题关键在于如何恰到好处地对数列的通项公式进行合理的拆分与放缩，使其可以裂为两项之差，使其由难变易、由繁入简，最终达到 " 精准裂项放缩 " 的解题效果[2][4]. 下面笔者以“数列不等式之裂项放缩”复习课的微设计为例，以期和大家共同探讨，以培养学生的高阶思维，提升数学的核心素养．

一、例题分析

问题1 已知 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$，数列$\{a_n\}$ 的前n 项和为S_n，

求证：(1) $S_n<2$；(2) $S_n<\dfrac{7}{4}$．

分析： (1) 因为

$$a_n=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}(n\ge 2,n\in N^*),$$

则当$n\ge 2$时，

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$$=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}$$

$$<1+\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=2-\frac{1}{n}<2$$

当$n=1$时，$S_n=1<2$显然成立.

所以，$S_n<2$.

(2)解法1　因为

$$a_n=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}(n\ge 2,n\in N^*),$$

基金项目：湖南省教育厅基础教育教学改革研究项目（No.Z2023161），怀化学院美育专项教学改革研究课题——新时代高校数学类课程美育功能的实现路径研究。

作者简介：
蒋丰盈（1991—），女，湖南怀化人，实验师，硕士，研究方向：数学教育。
余敏（1993—），女，湖南岳阳人，中教一级，硕士，研究方向：数学教育。

则当$n\geq 3$时，

$$
\begin{aligned}
S_n&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\
&=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}\\
&<1+\frac{1}{4}+\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]\\
&=\frac{5}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\\
&=\frac{7}{4}-\frac{1}{n}<\frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

当$1\leq n\leq 2$时，$S_1=1<\frac{7}{4}$，$S_2=\frac{5}{4}<\frac{7}{4}$显然成立.

所以，$S_n<\frac{7}{4}$.

解法2 因为

$$
a_n=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)(n\geq 2,n\in N^*),
$$

则当$n\geq 2$时，

$$
\begin{aligned}
S_n&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\
&=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}\\
&<1+\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\\
&=1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&=\frac{7}{4}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}<\frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

当$n=1$时，$S_n=1<\frac{7}{4}$显然成立.

所以，$S_n<\frac{7}{4}$.

评注 (1)从简单熟悉的通项公式$a_n=\frac{1}{n^2}$出发，将其放缩、裂项为：$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，这时$\{a_n\}$中的每一项皆可化为两项的差，那么在求和时便可直接消项，再将其结果进行放缩，可达到证明不等式的目的，帮助学生理解裂项放缩的本质。到（2）稍微提升难度，由证明$S_n<2$到$S_n<\frac{7}{4}$，可在（1）放缩裂项的基础上再保留一项，即从第三项开始放缩，便可证明不等式；也可缩小通项公式的放缩程度，将其放缩、裂项为$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$，这样与目标不等式更为接近，可得到要证明的不等式。

变式 求证：$S_n<\frac{5}{3}$.

解法1 因为

$$
a_n=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)(n\geq 2,n\in N^*),
$$

则当$n\geq 3$时，

$$
\begin{aligned}
S_n&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\
&=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}\\
&<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\\
&=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&=\frac{5}{4}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}<\frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

当$1\leq n\leq 2$时，$S_1=1<\frac{5}{3}$，$S_2=\frac{5}{4}<\frac{5}{3}$显然成立.

所以，$S_n<\frac{5}{3}$.

解法2 因为

$$
a_n=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}
$$

则当$n\geq 2$时，

$$
\begin{aligned}
S_n&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\
&=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}\\
&<1+\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{n-\frac{1}{2}}-\frac{2}{n+\frac{1}{2}}\right)\right]\\
&=1+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{n+\frac{1}{2}}\right)\\
&=\frac{5}{3}-\frac{2}{n+\frac{1}{2}}<\frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

当$n=1$时，$S_n=1<\frac{5}{3}$显然成立.

所以，$S_n<\frac{5}{3}$.

评注 由证明$S_n<\frac{7}{4}$到$S_n<\frac{5}{3}$，可引导学生在解决问题1第(2)问的基础上多保留一项，便可证明$S_n<\frac{5}{3}$；也可缩小通项公式的放缩程度，将其放缩、裂项为$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$.对于同一类型的问题，稍微提升难度，启发学生举一反三，进而培养学生思维的灵活性和深刻性.

二、综合提升

问题2 已知$a_n=\frac{1}{(2n+1)^2}$，S_n为数列$\{a_n\}$ 的前n项和，求证：$S_n<\frac{1}{4}$.

分析：因为

$$
a_n=\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),
$$

则

$$
\begin{aligned}
S_n&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\
&=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}
\end{aligned}
$$

 |

$$<\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{4}$$

所以, $S_n<\frac{1}{4}$.

问题3 已知 $a_n=\frac{1}{n^3}$ ，且数列 $\{a_n\}$ 的前n 项和

为S_n ，求证：$S_n<\frac{29}{24}$.

分析：因为

$$a_n=\frac{1}{n^3}<\frac{1}{n^3-n}=\frac{1}{n(n-1)(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)(n\geq 2,n\in N^*),$$

则当$n\geq 3$时，

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$$=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^3}+\frac{1}{n^3}$$

$$<1+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{34}\right)+\left(\frac{1}{34}-\frac{1}{45}\right)+\left(\frac{1}{45}-\frac{1}{56}\right)+\cdots\\+\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)\end{array}\right]$$

$$=\frac{9}{8}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$=\frac{29}{24}-\frac{1}{n(n+1)}<\frac{29}{24}$$

当$1\leq n\leq 2$时, $S_1=1<\frac{29}{24}$, $S_2=\frac{9}{8}<\frac{29}{24}$, 显然成立.

所以，$S_n<\frac{29}{24}$.

评注 将通项公式 $a_n=\frac{1}{n^2}$ 分母的底数与指数分别进行变形，难度再度升级，促进学生进一步理解裂项放缩的基本原理，学会根据证明的目标式选择放缩的幅度，分析比较寻找解题的最佳途径和方法，拓展学生的思维空间，有效地解决同类型问题。

三、课后思考

问题4 以下数列如何放缩？

(1) $a_n=\frac{1}{n}$;　　(2) $a_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$;　　(3) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$;

评注 运用本节课所学的放缩方法，供给学生课后思考探究，培养学生的创新意识与独立思考的能力，提升学生自主学习能力和核心素养。

四、结束语

在数列不等式问题中，若数列的通项公式是分式形式，且分母是关于 n 的整式，裂项求和是常见的放缩方向，通过放缩可把数列的通项公式裂为两项之差，再将各项相加，其中互为相反数的项相消，对剩余的项进行取舍并化简，逐步接近所要证明的目标式[8-10]，如 $\frac{1}{n^2}$的放缩有$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}(n\geq 2)$、

$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)(n\geq 2)$、

$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$等几种形式.

参考文献

[1] 王连英 . 循形而动因度而变——基于深度学习的 " 数列不等式放缩 " 微设计 [J]. 中学教研 (数学),2021(9):35.

[2] 宋秀云 . 为促进思维进阶而设计——数列求和的裂项相消法设计 [J]. 数学通报 ,2023:62(10):29-37.

[3] 骆晓梅，付中华 . 基于深度学习的 " 数列求和之裂项相消 " 复习课的微设计 [J]. 数学通讯 ,2022(10):44-46.

[4] 刘璐 . 微课程进军数学教学的一些思考 [J]. 中小学电教：综合 ,2017(7):4.DOI:10.ssss/j.issn.1671-7503.2017.7.023.

[5] 姚宏远 . 提高学生解决数列问题能力的方法研究 [D]. 西北大学 ,2017.DOI:CNKI:CDMD:2.1017.271199.

[6] 刘校星 . 基于波利亚解题理论的高考数列问题解题策略研究 [D]. 宁波大学 ,2019.

[7] 杨仁宽 . 巧裂项求数列的和妙放缩证明不等式——浅谈一类高考数列不等式问题的求解策略 [J]. 中学数学 ,2011,000(019):42-44.DOI:10.3969/j.issn.1002-7572.2011.19.015.

[8] 董培仁 . 用 " 分拆 " 法探索数列不等式放缩裂项的途径 [J]. 中学数学杂志 ,2008(03).DOI:10.3969/j.issn.1002-2775-B.2008.02.006.

[9] 周文韬 . 数列不等式的 " 缩放 " 技巧探究 [J]. 科学大众：科学教育 ,2016(2):2.DOI:CNKI:SUN:KXDH.0.2016-02-112.

[10] 陈晓娟 . 运用放缩法解数列不等式题的思路 [J]. 语数外学习：语文教育 ,2022(6):49-49.