

不同坐标系下速度加速度推导及其教学应用

杨国全, 段马威, 韩建新, 梁成功, 赵岩, 张然, 任力帆

晋中学院 物理与电子工程系, 山西 晋中 030619

DOI: 10.61369/VDE.2025150013

摘 要 : 针对当前大学物理简明教材在质点运动学章节中, 自然坐标系与极坐标系下速度和加速度表达式推导缺失的问题, 本文进行深入剖析与详细推导, 旨在填补这一教学空白, 提升学生对曲线运动规律的理解。首先探讨了在两种坐标系下速度和加速度表达式的推导过程, 通过对单位矢量方向变化的深入研究, 揭示了其对于运动分解的影响机制。其次通过对比分析, 揭示了两种坐标系在描述质点运动时的优势和局限, 为学生日后处理相关问题选择合适的坐标系提供理论支持。

关 键 词 : 自然坐标系; 极坐标系; 速度; 加速度

Derivation of Velocity and Acceleration in Different Coordinate Systems and its Teaching Applications

Yang Guoquan, Duan Mawei, Han Jianxin, Liang Chenggong, Zhao Yan, Zhang Ran, Ren Lifan

Department of Physics and Electronic Engineering, Jinzhong University, Jinzhong, Shanxi 030619

Abstract : In response to the issue of the absence of derivations of velocity and acceleration expressions in natural and polar coordinate systems in the kinematics chapter of current concise university physics textbooks, this paper conducts an in-depth analysis and detailed derivation, aiming to fill this teaching gap and enhance students' understanding of the laws of curvilinear motion. Firstly, the derivation process of velocity and acceleration expressions in the two coordinate systems is explored. Through an in-depth study of the changes in the directions of unit vectors, the impact mechanism on motion decomposition is revealed. Secondly, by comparative analysis, the advantages and limitations of the two coordinate systems in describing particle motion are revealed, providing theoretical support for students to choose appropriate coordinate systems when dealing with related problems in the future.

Keywords : natural coordinate system; polar coordinate system; velocity; acceleration

引言

在大学物理教学中, 质点运动学是基础且关键的内容。自然坐标系和极坐标系作为研究质点曲线运动的重要坐标系, 其速度和加速度表达式对于学生深入理解曲线运动的本质具有重要意义。然而, 现行部分高校选用教材^[1]在这部分内容上, 常直接给出表达式, 缺乏推导过程, 致使学生理解困难, 无法深入掌握相关知识要点, 主要表现为: 忽略坐标系单位矢量的时变性影响、混淆切向加速度与法向加速度的物理来源、无法辨析径向与自然法向的本质差异。为解决此问题, 撰写本文对其进行详尽推导。

一、自然坐标系下速度和加速度表达式推导

(一) 建立自然坐标系

自然坐标系是沿质点运动轨迹建立的坐标系^[2-4], 如图1所示, 以质点运动轨迹上某点 O 为原点, 以距离原点 O 的弧长 s 为参数, P 点的位置矢量可表示为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, 沿曲线切线方向的单位矢量记为 $\hat{\mathbf{t}}$, 垂直于切线方向(即法向)的单位矢量记为 $\hat{\mathbf{n}}$ 。切向和法向单位矢量随物体在轨迹上的位置而变化。

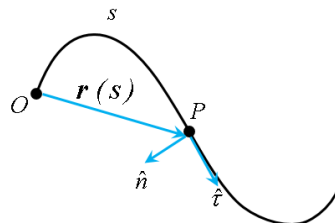


图1 自然坐标系示意图

基金项目:

山西省基础研究计划项目(202203021211337, 202303021222265);

山西省高等学校教学改革创新项目(J20231226, J20231250)。

作者简介: 杨国全(1982—), 男, 山西应县人, 晋中学院物理与电子工程系副教授, 博士, 主要从事大学物理教学和超冷原子气体研究工作。

(二) 自然坐标系下速度表达式推导

设质点在时刻 t 的位置矢量为 $\mathbf{r}(s_1)$ ，在 $t + \Delta t$ 时刻位置矢量为 $\mathbf{r}(s_2)$ ，则位移 $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(s_2) - \mathbf{r}(s_1)$ 。若将位移 $\Delta \mathbf{r}$ 沿切向和法向分解，当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，切向位移大小近似等于弧长 $\Delta s = s_2 - s_1$ ，而法向位移趋于零，故切向速度 $v_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ ，法向速度 $v_n = 0$ ，速度

在自然坐标系中只有切向分量， $\mathbf{v} = v_\tau \hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{ds}{dt} \hat{\boldsymbol{\tau}} = v \hat{\boldsymbol{\tau}}$ 。

(三) 自然坐标系下加速度表达式推导

加速度 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{\boldsymbol{\tau}}) = \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\tau}} + v\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt}$ ，利用链式法则处理第二项：

$\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} = \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} \frac{ds}{dt}$ 。这里 $\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds}$ 表示切线单位矢量 $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 对弧长 s 的变化率，其

大小为曲线的曲率 κ ，即 $|\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds}| = \kappa$ ，具体推导过程如下。

图2(a)为自然坐标系中邻近两点 P_1 和 P_2 的切向单位矢量 $\hat{\boldsymbol{\tau}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{\tau}}_2$ 示意图，其中 Δs 表示 P_1 和 P_2 之间的圆弧， ρ 为该圆弧所对应密切圆的曲率半径， $\rho = \frac{ds}{d\theta}$ 。为了直观地表示切向单位矢量 $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 对弧长 s

的变化率 $\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds}$ ，我们将 $\hat{\boldsymbol{\tau}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{\tau}}_2$ 平移到了同一个矢量三角里边（图

2(b)），考虑到切线单位矢量 $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 的大小恒为1，根据 $\frac{1}{2} \frac{d}{ds}(\hat{\boldsymbol{\tau}}^2) = \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds}(|\hat{\boldsymbol{\tau}}|^2) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds}(1) = 0$ 可知 $\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds}$ 的方向与 $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 相互垂直，结

合图2可知，当 $\Delta s \rightarrow 0$ 时， $\Delta \hat{\boldsymbol{\tau}}$ 必将指向密切圆的圆心， $\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds}$ 与 $\hat{\mathbf{n}}$

方向相同，所以有 $\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} = \kappa \hat{\mathbf{n}}$ 。这里 $\kappa = |\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds}| = \frac{1 \cdot d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$ ，可见 κ 是一个

与曲线弯曲程度相关的量。

综上所述，自然坐标系中加速度的表示式可以整理为：

$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \hat{\boldsymbol{\tau}} + \frac{v^2}{\rho} \hat{\mathbf{n}}$ ，自然坐标系的加速度分解源于轨迹的局部几何

特性。

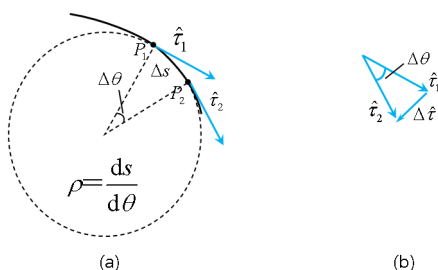


图2 自然坐标系中邻近两点 P_1 和 P_2 的切向单位矢量示意图

二、极坐标系下速度和加速度表达式推导

(一) 极坐标系的建立

极坐标系^[3-6]以平面上某固定点 O 为极点，从极点 O 出发的一

条射线 Ox 为极轴，质点 P 的位置由极径 r 和极角 θ 确定，如图3所示。沿 r 方向的单位矢量记为径向单位矢量 $\hat{\mathbf{r}}$ ， \mathbf{r} 表示 P 点的位置矢量， $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ ，垂直于 $\hat{\mathbf{r}}$ 且沿逆时针极角增大方向的单位矢量记为横向单位矢量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 。径向单位矢量和横向单位矢量也会随 P 点所处空间位置而变化。

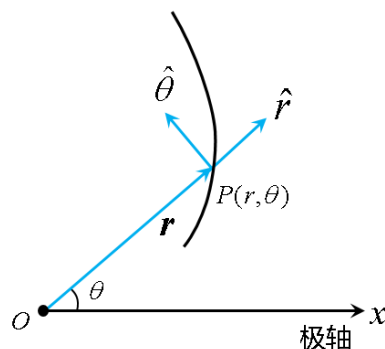


图3 极坐标系示意图

(二) 极坐标系下速度表达式推导

图4(a)为自然坐标系中邻近两点 P_1 和 P_2 的径向和横向单位矢量 $\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2$ 和 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2$ 示意图，质点在时刻 t 的位置矢量为 $\mathbf{r}(t)$ ，在 $t + \Delta t$ 时刻位置矢量为 $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ 。将质点的位置矢量 $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ 对时间 t 求导，根据莱布尼兹复合函数求导法则可得速度 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{\mathbf{r}})}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ 。单位矢量 $\hat{\mathbf{r}}$ 随时间的变化率 $\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ 满足的关系式推导过程如下。

同样地，为了直观地表示径向单位矢量 $\hat{\mathbf{r}}$ 的变化情况，我们将 $\hat{\mathbf{r}}_1$ 和 $\hat{\mathbf{r}}_2$ 平移到了同一个矢量三角里边，如图4(b)所示。根据 $\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = |\hat{\mathbf{r}}| \frac{d|\hat{\mathbf{r}}|}{dt} = 0$ 可知 $\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ 的方向与 $\hat{\mathbf{r}}$ 相互垂直，即 $\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ 与 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 方向相同。

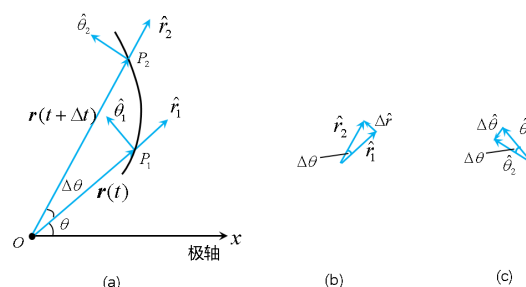


图4 极坐标系中两点 P_1 和 P_2 的径向和横向单位矢量示意图

又因为 $\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(1 \cdot \Delta \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}}$ ，极坐标系中速度的表示

式可以整理为 $\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}}$ ，其中右边第一项代表速度的径向

分量，反映了 r 长度的变化，右边第二项代表速度的横向分量，

反映了 r 方向的变化，且与角速度 $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ 有关。

(三) 极坐标系下加速度表达式推导

对速度 \mathbf{v} 再次求导，可得加速度 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} \right) + \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\theta}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)$ 。其

中 $\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{r}\right)=\frac{d^2r}{dt^2}\hat{r}+\frac{dr}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt}$, $\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}\right)=\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta}+r\frac{d\hat{\theta}}{dt}$, 单位矢量 $\hat{\theta}$ 随时间的变化率 $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$ 满足的关系式推导过程如下.

为了直观地表示横向单位矢量 $\hat{\theta}$ 的变化情况, 我们将 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 平移到了同一个矢量三角形里边, 如图 4(c) 所示. 根据 $\hat{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}=\left|\hat{\theta}\right|\frac{d\left|\hat{\theta}\right|}{dt}=0$ 可知 $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$ 的方向与 $\hat{\theta}$ 相互垂直, 即 $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$ 与 \hat{r} 方向平行.

又因为 $\frac{d\hat{\theta}}{dt}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\hat{\theta}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}-\frac{(1\cdot\Delta\theta)\hat{r}}{\Delta t}=-\frac{d\theta}{dt}\hat{r}$, 极坐标系中加速度的表示式可以整理为 $\boldsymbol{a}=\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\hat{r}+\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\hat{\theta}$, 其中右边第一项代表加速度的径向分量, 反映了离心项的来源, 右边第二项代表加速度的横向分量, 反映了科里奥利项的来源, 且与角加速度 $\frac{d^2\theta}{dt^2}=\alpha$ 有关.

三、讨论

自然坐标系能直接体现物体运动的切向和法向特性, 对于分析曲线运动中物体的速度、加速度在运动轨迹切向和法向的分量变化非常直观. 在研究如圆周运动、一般曲线运动的动力学问题时, 可方便地将力和加速度沿切向和法向分解, 使问题分析更简洁. 但是, 自然坐标系的适用范围相对较窄, 主要适用于已知运

动轨迹的曲线运动问题. 对于运动轨迹复杂多变或难以用简单方程描述的运动, 建立自然坐标系可能会很困难, 且分析过程可能会因轨迹的复杂性而变得繁琐^[7-10].

极坐标系在处理有心力问题, 如天体运动、带电粒子在中心力场中的运动时, 具有独特优势. 它能利用极坐标下的对称性和物理量的特殊关系, 简化运动方程的建立和求解过程. 同时, 对于描述具有旋转对称性的运动系统, 能清晰地表示出物体的位置、速度和加速度等物理量与角量和距离的关系. 但是, 对于非中心对称或非旋转对称的运动问题, 使用极坐标系可能会使问题复杂化. 而且极坐标下的数学运算, 如求导、积分等, 相对直角坐标系可能会更复杂, 需要对极坐标的相关知识有深入理解才能熟练运用^[10-15].

总之, 自然坐标系和极坐标系在处理运动问题时各有优缺点, 具体情况需具体分析.

四、结论

通过对自然坐标系和极坐标系下速度和加速度表达式的详细推导, 弥补了现行部分高校大学物理教材在此部分内容的不足. 有助于学生更深入、全面地理解质点曲线运动的规律, 为后续物理课程的学习奠定坚实基础. 在教学过程中, 教师可将本文推导内容融入课堂, 以提升教学效果. 同时, 期望本文能为物理教材编写者提供参考, 完善相关内容的呈现方式.

参考文献

- [1] 赵近芳, 王登龙. 大学物理简明教程 [M]. 4 版. 北京: 北京邮电大学出版社, 2020: 8-13.
- [2] 唐瑾怡, 桑芝芳. 曲面轨道摩擦力做功问题的讨论 [J]. 物理与工程, 2024, 34(04): 199-204.
- [3] 段石峰. 关于对“线速度”究竟如何定义的思考 [J]. 物理教学探讨, 2023, 41(10): 54-56.
- [4] 姚露. 智能汽车避障路径规划及跟踪控制研究 [D]. 西华大学, 2023.
- [5] 张程虹. 分段拼接坐标系在越岭公路中的局限性分析 [J]. 科技资讯, 2024, 22(05): 119-121.
- [6] 黄晚桃, 曹广福. “坐标系”的起源、发展及教学思考 [J]. 数学通报, 2023, 62(09): 18-25+45.
- [7] 杨春艳, 吉恒. 对一道摆锤运动例题的分析及教学启示 [J]. 物理通报, 2024, (07): 24-25+29.
- [8] 周庆, 唐娟娟, 林丛. 速度与加速度在不同坐标系中的表示方法研究 [J]. 湖南中学物理, 2020, 35(02): 25-28.
- [9] 向晓永. 线状工程中平面坐标系构建研究 [J]. 科学技术创新, 2024, (22): 165-168.
- [10] 张宪宇. 基于双坐标系的高分辨率圆时栅测量方法与实验研究 [D]. 重庆理工大学, 2024.
- [11] 孙大军, 黄天凤, 梅继丹, 等. 极坐标系快速反卷积高分辨声图测量方法 [J]. 声学学报, 2024, 49(05): 967-978.
- [12] 高远, 周冬冬, 文茂诗, 等. 极坐标变换下的风电机组风向优化处理方法 [J]. 船舶工程, 2024, 46(S2): 62-64+104.
- [13] 邵云, 赛璐. 简析极坐标系下曲线曲率半径的数学与力学推理方法 [J]. 大学物理, 2020, 39(8): 14-17.
- [14] 陈恺铠. 基于旋转坐标系的无人机悬停无线充电系统互感估计研究 [D]. 天津大学, 2024.
- [15] 高远, 周冬冬, 文茂诗, 等. 极坐标变换下的风电机组风向优化处理方法 [J]. 船舶工程, 2024, 46(S2): 62-64+104.