浅析统计学专业《实变函数》课程的教学方法

任睿超
渭南师范学院数学与统计学院，陕西 渭南 714099

DOI:10.61369/EST.2025040039

摘　要： 《实变函数》是高校本科数学系高年级的必修课程。然而由于该课程概念较为抽象、理论繁琐难懂，不少学生在学习时感觉举步维艰、毫无头绪。本文结合数学系统计学专业的实际学情，以概率统计部分为切入点，围绕测度论与积分论等主干框架，将《实变函数》与《概率论》两门课程内容相结合，改进《实变函数》课程的教学方法。采用问题导向、类比、案例分析等手段，使学生充分理解和掌握《实变函数》课程的核心理论，并应用《实变函数》中的知识来解决《概率论》课程中出现的实际问题，达成多学科融会贯通的良好课堂效果。

关 键 词： 集合论；测度论；积分论；概率密度分布；期望；方差

Analysis of the Teaching Methods of the Course "Real Variable Functions" in Statistics Major

Ren Ruichao
School of Mathematics and Statistics, Weinan Normal University, Weinan, Shaanxi 714099

Abstract： Real Variable Functions "is a compulsory course for senior students in undergraduate mathematics departments in universities. Due to its abstract concepts and complex theories, many students find it difficult to learn and have no idea where to start. This article combines the analysis of the learning situation in the major of Mathematical Systems and Statistics, with probability and statistics as the starting point, focusing on the main contents of measurement theory and integration theory, to analyze the teaching methods of the course "Real Variable Functions". By combining probability and statistics with measurement theory, students can better understand the many complex theories in the course and achieve a good teaching effect of interdisciplinary integration.

Keywords： set theory; measure theory; integral theory; probability density distribution; expectation; variance

引言

《实变函数》是高校本科数学系的理论必修课。对于本科生来说，这就是一座难以攀登的险峰。凭借其抽象难懂的理论，《实变函数》在本科数学系课程中“一举成名”，近年来高校学生间普遍流传着“实变函数学十遍”这样的说法。《实变函数》课程的理论体系主要由测度论与积分论构建而成，它是《数学分析》课程中可积函数理论的一般化拓展。测度论的重点研究对象为可测集合以及定义在这类集合之上的可测函数，它是区间上连续函数理论的推广。而定义在可测集上的可测实值函数的积分问题，又是微积分基本原理的延伸，且与《概率论》课程中的诸多理论知识点都有着千丝万缕的联系。

基于以上背景，本文将从统计学专业学生的实际学情出发，深入分析当前学生学习过程中遇到的各种困难和问题，寻求一些有效的教学途径。通过剖析《实变函数》与《概率论》课程中相关理论内容的内在联系，将抽象的概念形象化。采用问题导向、类比法、案例分析法等手段，以帮助学生更好地理解与学习《实变函数》课程，同时培养学生运用理论解决实际问题的能力。

一、学生学习情况分析

统计学专业学生在完成《数学分析》、《高等代数》、《概率论》等课程学习后，已经有了一定的理论基础，并具备了一定的数学逻辑思维能力。然而，由于《实变函数》课程理论难度较大，概念较为抽象，学生普遍反映学习过程中存在“学不懂”、“不得窍”“证明无思路”等困难。一些教师在课堂讲授过程中，也忽视了这种思维方式的大跨越，导致学生“听不懂”或“完全不理解”“不会证”等问题。具体表现如下：

1. 在集合论学习过程中，我们将无穷集列的运算作为该部分

 | Copyright © This Work is Licensed under A Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License.

的重点。学生在学习《数学分析》与《概率论》课程的时候，虽已掌握极限与集合的基本运算，了解了有限集列交并运算保持开闭性。但对于“无穷集列交、并运算并不一定保持开闭性”的结果仍未完全理解，以及对于 Borel 集（开集、闭集、F 集、G 集）的构成，也没有较为清晰的概念，这对后面的学习造成了一定障碍。

2. 在测度论的学习中，重点和难点是可测集、可测函数的性质与构造。在《数学分析》课程中，已经详细讨论过区间构造的三大定理（区间套定理、有限覆盖定理、Weirestress 定理）。然而，将这结论抽象地引申到可测集当中，结合区间的性质来定义测度的性质，很多学生理解起来就存在很大困难。另外，学生在学习《数学分析》课程后，对区间上的连续函数理论已有了比较成熟的理解，也能轻易完成一些简单的证明。但在可测函数部分的学习中，普遍就感觉力不从心，无法深刻理解可测集上的可测函数性质的构造。

3. 在积分部分的学习过程中，以非负与一般可测函数的 Lesbesgue 积分、以及两种积分的关系作为重点和难点，它是《数学分析》课程中区间上连续函数积分理论的推广。站在《数学分析》角度，学生非常清楚什么样的函数可积。当进一步研究一般函数的积分时，就需要扩充以上可积函数的类型，于是积分问题就转化为了测度理论。这导致了很多学生概念混淆，无从入手。同时，对于两种积分的关系，学生也普遍感觉难以理解。

二、教学方法探究

本节我们根据以上教学过程中出现的问题，以普通高校教材[1-6]作为参考标准，对《实变函数》课程的教学方法进行详细阐述。具体划分如下：

（一）集合论的教学

在《实变函数》课程内容教学中，主要有五个章节，其中前两节讲授的是集合理论。我们如果将集合比喻为发生的事件，那么其中的很多运算就可用事件发生的关系来理解。如交运算就是同时发生，并运算即有一个事件发生，差运算是一个发生且另一个不发生，补运算是该事件不发生。而在整个样本空间中，如果考虑事件 E 的每一子事件 A_i，这样的 A_i 就有无穷多可数个。于是我们就可以定义无穷多子事件发生的集合运算与极限运算，即《实变函数》中集列的交、并、差、确界与集列的极限运算，有助于学生进一步理解事件可能发生的情况。可以想象成为，当样本点趋于无穷大时，事件相互作用后的发生结果如何。这样，就能讲清楚事件与集合的关系，为学生理解掌握无穷集列运算打下了坚实的基础。具体的性质如下：

1. $\sup\limits_{n\geq 1} A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$（$A_n$ 为可数个事件列，其上确界表示事件列中至少有一个事件发生，那么该情况就是集列的并，即取所有事件的上确界）

2. $\inf\limits_{n\geq 1} A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$（$A_n$ 为可数个事件列，其下确界表示所有事件同时发生，这也就是集列的交，即取所有事件的下确界）

3. $\inf\limits_{n\geq 1}\sup\limits_{m\geq n} A_{m,n}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_{m,n}, \sup\limits_{n\geq 1}\inf\limits_{m\geq n} A_{m,n}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_{m,n}$，表示以上事件列发生的极限状态，在概率中的应用主要是可由事件的极限来进一步描述事件发生的概率的极限，来进一步判断和量化该事件发生的最终可能性，如上极限表示至少发生一个事件的最小覆盖，下极限代表同时发生所有时间的最大可能。若最小覆盖等于最大可能，则可以理解为所有事件发生时必有一个最终确定的结果，即无穷集列的极限。当集列为单调情形时，此时事件的发生必导致一个最终确定的结果。这就能更清晰地领悟为何在此情形下集列的极限一定存在，且可以直接定义为交并或确界运算，这也就是《数学分析》中单调有界性准则的推广。

（二）测度论的教学

《实变函数》课程的第三、四章节分别介绍了可测集与可测函数。而由公理化定义的测度概念，以及开集、闭集、F 集、G 集，甚至 Borel 集均是可测集，我们知道，样本空间及其上任一子事件都可以认为是可测集类。而在前面的教学过程中，我们如果讲清了开集、闭集、F 集、G 集、Borel 集的构造与事件发生之间的关系，那么学生就能很快理解并掌握事件是可测集类这一重要结果。在讲授过程中，可以结合概率的定义、可测集满足的非负性与可数可加性，以及可测集的运算理论作比较，使学生充分认识到：概率就是 Lesbesgue 测度。

这样，概率就有如下四种定义：

1. 经典定义：对于古典试验中的事件 A，$p(A)=\frac{m}{n}$（其中 n 为该试验中可能出现结果总数，m 为事件 A 包含的试验结果总数）；

2. 频率定义：$p(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n$（其中 n 为试验次数，$\omega_n$ 为事件 A 出现的频率）；

3. 统计定义：$p(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(A)}{n}$（其中 n 为试验次数，n(A) 为事件 A 出现的次数）；

4. 测度定义：设 E 是随机事件，S 是其样本空间。对于 E 的每一子事件 A 定义非负实数 p(A)，称为事件 A 的概率，若满足以下条件：

(a) 非负性：对于 $\forall A\subseteq E, p(A)\geq 0$；

(b) 规范性：对于必然事件 $\Omega, p(\Omega)=1$；

(c) 可数可加性：对于两两互不相容的事件 A_i, A_j，即 $A_i\bigcap A_j=\Phi$，则有

$$p(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$$

我们看到，在定义 4 中，事件就是一个集合，而概率就是测度。

对于测度的定义，我们可以先引入欧氏度量公理，并说明按此来度量 [0,1] 区间上有理数集长度与无理数集长度产生的矛盾。这与概率定义中的公理一致。阐明长度这一概念需要满足可数测度公理，即需要找到这样一集合类，使得该集合类满足交并差运

Copyright © This Work is Licensed under A Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License.

算封闭，且包含整个空间R^n与开区间 I，即一个代数，同时要使得定义的度量保证可数可加性成立。这样，任意两两不交的集合均满足长度可加性，我们任意选取开区间 I，就可以将集合类中某一集合 E 视为待测试集，于是$I\bigcap E$与$I\bigcap E^C$就为任意两两不交的集合。下一步，将测试区间 I 更换为更一般的测试集合 T，我们就给出了著名的 Catheredory 条件$m^*T=m^*\left(T\bigcap E\right)+m^*\left(T\bigcap E^c\right)$，同时先验证该条件下定义的外测度满足有限可加性与可数可加性，此时可以分别取$T=\bigcup_{i=1}^n E_i, T=\bigcup_{i=1}^\infty E_i$加以验证，证明过程中用到的方法主要有外测度的定义、性质与 Catheredory 条件，而概率的定义也恰好满足了这些条件。最后，在完成上述过程讲授后，我们再来解释集合的测度与可测集就一目了然，《概率论》中它恰好对应于事件发生的概率。

进一步，按照上述分析，对于可测集性质的讲解也被大幅简化。由 Catheredory 条件显然可知 E 可测等价于E^C可测，这样一来，我们刚才已经证明了并集的可测，只要取余集，利用《概率论》中事件的 De-Morgen 运算律马上就可得到交集的可测结果，最后作为以上结果的推论，对差集也可以得到可测的结论。特别强调的是，对于差集的测度，也可以用全概率公式来解释。

最终，我们在以上基础之上，顺理成章，介绍单调可测集列的极限定义。这样就联系了第一章第一节集列的极限部分，即将集列的极限测度转化为测度的极限，也就是将极限事件发生的概率等价到事件概率的极限，以此来描述多复杂事件发生的可能，在统计学中有着广泛应用。该部分也可结合《数学分析》中，对数列单调有界性极限准则的推广，来加以讲解。

在可测函数部分，对于概念的讲解，我们首先从非负简单函数入手。结合古典概型中的一些离散分布的概率密度，我们不难发现，其分布函数本身也是一个非负简单函数，它是可测的。然而，在连续概率分布情况下，我们用非负简单函数列无限逼近就得到了一个非负可测函数，即连续概率密度函数。这相当于用简单函数列去逼近某一个函数来定义该函数的可测性，相当于离散分布的极限是连续概率密度分布，用它来定义一个非负可测函数。然后，再给出其等价定义如下：

(i) $\forall a\in \mathrm{R}, \mathrm{E}[f\ge a]$可测；

(ii) $\forall a\in \mathrm{R}, \mathrm{E}[f<a]$可测；

(iii) $\forall a\in \mathrm{R}, \mathrm{E}[f\le a]$可测；

(iv) $\forall a\in \mathrm{R}, \mathrm{E}[f>a]$可测；

(v) $\forall a\in \mathrm{R}, \mathrm{E}[a\le f\lhd b]\bigcup E\left[f=\infty\right]$可测.

并证明该定义与前面的极限定义等价。而其含义正是随机变量可能出现在某一区间的概率，这可以用连续概率密度分布来解释。接下来，再引入广义函数的正部与负部，将非负可测函数的上述定义推广至一般可测函数中去。以上五个等价命题之一也可验证一般广义函数的可测性。

对于可测函数的收敛性质，除了简单函数以外，我们还有两个特别重要的定理：Egoroff 定理与 Lusin 定理，它们以两个重要定义为基础：几乎处处收敛与依测度收敛，在概率论中有着非常广泛的应用。几乎处处收敛描述的是除去一个零测集后函数逐点收敛的性质，$\lim_{n\to\infty} f_n=f, a.e.\ inE$表示极限事件是几乎处处发生的；而依测度收敛则与概率论中的大数定律密切相关，$\lim_{n\to\infty} p(E[|f_n-f|>\varepsilon])=0$表示极限事件的不发生点的测度可任意小，是可忽略的，即该极限事件必会发生，即随机变量序列的算术平均值应向各数学期望的算术平均值收敛。Lusin 定理则描述的是在测度意义下可测函数如何用连续函数来逼近，这在概率中可以用离散随机变量分布函数逼近连续随机变量分布函数来理解。

（三）Lebesgue 积分的教学方法

教材第五章的 Lebesgue 积分部分是实变函数的核心问题。这里，需要先举例说明 Riemann 积分的局限性。以 Direchlet 函数与 Dirac 函数为例，可结合概率统计中那些不连续分布密度函数下求解期望和方差的情况，分别说明可积性定义与积分极限换序问题需要在广义函数意义下解决的重要性。

在介绍背景后，我们可以测度分划首先定义一个简单函数在某一测度上的积分，即离散分布变量意义下的概率积分。再将其取上确界（极限）得到连续分布变量意义下的概率积分，即定义了非负可测函数的积分就是其曲线下方分划矩形面积和的上确界（极限）。这里$\nu(A)=\int_A fd\mu, (f\ge 0)$也是一个测度，若将 A 看作随机事件，f 看作随机事件变量的可测分布函数，则$\nu(A)$就是一个概率测度，此时积分与测度等价。另外，非负可测函数中，著名$[a,b]$的 chebyshev 不等式$m\{E[f\ge a]\}\ge \frac{1}{a}\int_E fdx$，也可从概率角度来理解。

更一般地，利用广义函数的正部与负部，可将此定义推广到一般可测函数的 Lebesgue 可积与 p 次方 Lebesgue 可积函数空间中，分别给出积分的直观定义$(\int_m |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$与测度定义$\int_m \mu^{p-1}\{E[f>0]\}df$。对于 Lebesgue 积分的性质，也是从非负可测函数情形推广至一般可测函数情形，对于非负可测函数的性质，可结合概率密度分布、连续随机变量的期望、方差、多阶矩等统计学术语等逐一进行讲解。

另外，Lebesgue 控制收敛定理及其重要推论 Fatou 引理解决了可测函数积分与极限的换序问题，在中心极限定理等问题中也有广泛应用。由此引申的 Chebyshev 不等式将有限数学期望与方差，以及大数定律的关系进一步阐明，基本想法就是将积分与测度关系等价于概率密度分布的期望。

最后，在讲授 Riemann 积分与 Lebesgue 积分关系的过程中，应先由$[a,b]$上 Riemann 可积的原始充要条件，将达布上和与下和的差（振幅）写作测度积分形式，然后导出$[a,b]$上 Lebesgue 可积的充要条件为被积函数$f(x)$几乎处处连续。进一步引入$[a,b]$上广义有界变差函数的概念，得到$[a,b]$上函数$f(x)$可积的充分条件。在此过程中，我们发现有界变差恰好是概率分布中常见的一类密度函数，其包含了可数个可去间断点，符合概率分布的基本特征。

 Copyright © This Work is Licensed under A Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License.

三、结语

本文主要讨论了对于统计学专业大三学生《实变函数》课程的教学方法，从集合论、测度论以及积分论三个主干内容展开，并结合概率统计中的重要概念定理进行关联分析。这些概率统计学科的相关概念，从实变函数角度来理解一目了然。另外，学生在学习《实变函数》课程的同时，也重新理解领悟了概率当中的很多概念、定理和定律，这一过程大大提高了学生的思维素养与课堂学习效果。然而，由于本人能力有限，本文只给出了主干问题的教学思路，很多细节问题的教学方法尚待进一步探究，衷心希望广大读者多提宝贵意见和建议。

参考文献

[1] 曹怀信 . 实变函数引论 [M]. 西安：陕西师范大学出版社 ,2010.

[2] 江泽坚 , 吴智全 . 实变函数论 [M]. 北京：人民出版社 ,1979.

[3] 程其襄 , 张奠宙 , 魏国强等 . 实变函数论与泛函分析基础 (第二版)[M]. 北京：高等教育出版社 ,2003.

[4] 曹怀信 . Riemann 积分与 Lebesgue 积分的关系 [J]. 陕西师范大学继续教育学报 ,2005,3:100-105.

[5] 夏道行 , 吴卓人 , 严绍宗等 . 实变函数论与泛函分析 (第二版)[M]. 北京：高等教育出版社 ,1985.

[6] Torchinsky A. Real Variables [M]. New York:Addison-Wesley Pub. Comp. Inc.,1988.

Copyright © This Work is Licensed under A Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License.