GeoGebra与对话式AI教学培养高中生数学建模素养——以椭圆最值与轨迹问题为例

李成龙，陈兆英，朱安新
济南大学，山东 济南 250002

DOI:10.61369/EIR.2025040014

摘　要： 探讨GeoGebra与对话式AI融合教学对中学生数学建模素养的提升路径，以椭圆最值与轨迹问题为实践案例。阐述开展此项研究的背景意义、研究目的和问题，并对相关文献进行综述。构建“AI辅助教学设计—GeoGebra可视化建模—学生探究实践”教学模式。二者协同提高学生数学学习的质量，促进建模核心素养的提升。并为信息化教学中优化建模课教学设计提供实践范式和教学建议。

关 键 词： GeoGebra；对话式；AI；数学建模素养；椭圆最值问题

GeoGebra and Conversational AI Teaching Cultivate High School Students' Mathematical Modeling Literacy — Taking Ellipse Maximum and Minimum Values and Trajectory Problems as Examples

Li Chenglong, Chen Zhaoying, Zhu Anxin
Jinan University, Jinan, Shandong 250002

Abstract: This paper explores the improvement path of middle school students' mathematical modeling literacy through the integrated teaching of GeoGebra and conversational AI, taking the maximum and minimum values of ellipses and trajectory problems as practical cases. This paper expounds the background significance, research purpose and problems of conducting this study, and reviews the relevant literature. Construct a teaching model of "AI-assisted instructional design - GeoGebra visual modeling - student inquiry and practice". The two work together to enhance the quality of students' mathematics learning and promote the improvement of their core literacy in modeling. And provide practical paradigms and teaching suggestions for optimizing the teaching design of modeling courses in information-based teaching.

Keywords: GeoGebra; conversational style; AI; mathematical modeling literacy; the maximum and minimum value problem of an ellipse

一、概述

在数学教育信息化与核心素养培养的双重背景下，传统高中数学教学中建模素养培养面临显著挑战[1-2]。椭圆最值与轨迹等建模问题常因抽象的几何关系与代数转化，使得学生难以从实际问题中提炼数学模型，陷入“重解题技巧、轻建模思维”的困境；此外，信息化工具的应用多停留在碎片化演示层面，缺乏与建模教学流程的深度融合。随着《普通高中数学课程标准》对数学建模核心素养的明确要求，如何借助技术工具构建系统性建模教学路径，成为教育实践的重要课题[3]。

从研究现状看，GeoGebra 在中学数学可视化教学中的应用较为丰富：汪佳婕[4]在多元表征视角下应用 GeoGebra，发现能帮助学生更直观的理解数学；王荣亮 ,王艳彩[5]探讨在指数函数教学过程中，GeoGebra构建的可视化案例有助于提升数学教学质量和教学效果；耿艳妮[6]研究利用 GeoGebra平台，设计有效的教学策略来提升教学质量与学生的学习体验；张立磊 ,于萍[7]介绍了GGB软件与高中数学传统教学融合的原则及应用策略。

对话式AI在教育领域的应用则更多聚焦于思路与建议层面，较少展开具体的实施。刘明 ,吴忠明 ,廖剑[8]等梳理了对话式ChatGPT提升数学解题水平等教学应用场景。Bettayeb M A,Talib A M,Altayasinah S Z A[9]强调ChatGPT等对话式AI为学生提供了个性化的帮助并改善学习体验。但在辅助教师进行建模问题设计、解决方案构建等方面的研究仍显不足。尤其在椭圆最值问题的教学中，传统模式常因缺乏动态参数关联演示，导致学生难以理解离心率、焦点位置等变量与最值条件的内在联系，单纯利用AI辅助则忽视在建模问题设计与路径规划中的核心需求。如何通

作者简介：李成龙（2002—），男，汉族，山东青岛人，研究生学历，研究方向为数学教育。

过对话式 AI辅助教师构建教学设计的问题链，并借助 GeoGebra 实现模型的可视化验证，成为突破建模素养培养瓶颈的关键。

二、GeoGebra与对话式 AI辅助教学实践

（一）椭圆最值与轨迹问题的重要性

椭圆最值与轨迹问题是高中数学建模教学的核心内容[10]。从几何与代数的融合特性到现实问题的抽象应用，再到完整建模流程的实践训练，这类问题为学生提供了多层次的素养提升路径，具体体现在以下方面：

一是作为几何直观与代数思维深度融合的典型载体，其动态变化特性能促使学生在图形观察与代数推导的转化中，强化几何特征与代数条件的关联，掌握将几何位置关系转化为代数表达式，再通过代数运算反哺几何意义的双向思维，为数学抽象等素养奠定思维基础。

二是针对真实场景，要求学生从复杂现实问题中提取关键变量、忽略次要因素，实现现实问题到数学模型的转化，在反复实践中培养用数学眼光观察世界、从实际情境提炼数学模型的核心能力。

三是模型解决需经历问题抽象、模型构建、问题解决的过程，学生需综合运用几何性质、函数、不等式等多方面知识，借助动态可视化工具与代数推导结合验证模型，在系统性思维训练中形成科学的建模流程意识，掌握协调多工具多方法解决复杂问题的实践路径，以应对现实中的数据建模问题。

（二）教学设计流程

为有效提升高中生在椭圆最值与轨迹问题中的数学建模素养，依托对话式 AI与 GGB工具的融合应用，构建“设计—实施—反馈—优化”的闭环教学流程。从四个关键阶段，阐述如何通过问题链设计、动态的工具适配、深度的课堂探究及持续的反思改进，实现学生建模能力的培养。该模式流程图如图 2.1 所示：

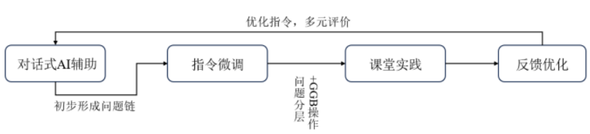

图2.1 对话式 AI与 GeoGebra辅助教学的模式构建

1.对话式 AI辅助阶段：初步构建问题链

教师向对话式 AI输入明确教学指令，包括建模问题、教学目标、学生认知水平及难点。可依据 APOS理论自动生成四阶问题链：操作层问题引导学生通过 GGB动态演示建立直观感知；过程层问题聚焦具体问题，启发学生用参数方程表示并推导代数关系；对象层问题推动将实际问题转化为参数函数并尝试求解；图式层问题则提出问题变式等，引导迁移拓展。此过程中教师需提供明确指令，确保问题链连贯自然且具启发性。

2.指令微调阶段：持续修改与选择

在 AI生成问题链后，可以从两方面优化：一是修正问题链，根据学生水平调整难度，将复杂问题拆分为小步骤提问或提示，使逻辑更连贯；同时打磨问题表述，让语言更清晰，确保问题既具启发性又贴合学生思维。二是设计 GGB可视化方案：操作类问题配动态图形帮助学生直观感知；推导类问题通过参数联动呈现数学关系；验证类问题预设数据记录工具方便归纳规律。

3.课堂实践阶段：实施可操作的教学设计

教师按照优化后的问题链利用 GGB演示与操作推进课堂：引导学生用 GGB操作建立直观感知；引导将建模问题转化为代数表达， GGB可视化操作辅助理解转化过程；中学生通过建立目标函数，并验证模型的合理性；最后可以通过变式问题驱动迁移，归纳共性策略。教师需要把控问题梯度，，针对性提供支持，让学生在连贯体验中提升建模能力。

4.反馈阶段：持续优化与评价

课堂结束后，教师需要整合多元反馈进行教学设计优化：可以通过分析建模过程中的思维阻塞点；听取同事评价，聚焦问题链梯度合理性与 GGB工具对难点的突破效果；通过问卷或访谈获取学生对问题启发性、工具易用性的反馈。基于反馈，调整 AI指令与 GGB可视化方案：形成“理论设计—实践验证—反思改进”的闭环，通过持续优化提升问题链与学生建模素养发展的契合度。

（三）教学实施过程

以椭圆最值与轨迹问题为案例，根据 GeoGebra与对话式 AI辅助教学模式，具体教学过程实施如下：

1.课前准备

问题提出：

教师可向目前交互式较好的对话式 AI平台，如 Coze平台等提供建模问题：

“关于椭圆的生态泳池方程为：$\frac{x^2}{3600}+\frac{y^2}{1600}=1$，单位(米)。有观测站 A(−80,60)，B(60,30)，需在泳池边界设观测点 P，满足到两观测站线缆总长度 PA+PB 的长度最短且对湖中心 O(0,0) 与长轴端点 M(60,0) 的张角 $\angle OPM$ 不小于 60°，求满足条件的监测点 P 的坐标及最短线缆总长度。

问题链生成：

对话式 AI根据具体指令生成四阶问题链，如表 2.1 所示：

表2 .1 AI辅助初步生成四阶问题链

问题链	层次
T1:从生活经验思考，PA+PB最短时，监测点 P处于何处？	操作层：建立实际几何联系
T2:用什么数学方法来表示动点 P的位置？	
T3:PA+PB之间的距离如何表示？	过程层：构建表达式
T4:用什么代数关系来描述 $\angle OPM$ 不小于 60° 这个条件？	
T5:如何借助 GeoGrebra验证模型？	对象层：构建模型求解
T6:将观测点 A 点坐标改为 A(−80,0)，模型如何构建？	图示层：引导迁移拓展

问题调整

根据生成问题 T2，可以提示学生通过建立参数方程来表示 P 点的坐标以及位置：$P(60\cos\theta, 40\sin\theta)$；

根据生成问题 T3，可以引导学生利用两点间距离公式表示线缆的最短距离 $PA+PB=\sqrt{(60\cos\theta-60)^2+(40\sin\theta-30)^2}+\sqrt{(60\cos\theta+80)^2+(40\sin\theta-60)^2}$；

根据生成问题 T4，指引学生利用余弦定理来描述 $\angle OPM$ 的取

值范围：$\cos\angle OPM=\frac{OP^2+PM^2-OM^2}{2OP\cdot PM}\le\frac{1}{2}$

2.教学环节

问题引入，情境感知

教师需要通过生活化的问题情境激发学生兴趣，建立几何直观，明确建模目标。通过生成与调整的问题 T1、T2，引导学生回顾椭圆的参数方程，并初步猜想 PA+PB的最优位置，教师利用 GeoGebra绘制泳池问题的初步模型，可以增强学生的几何直观。如图2.2：

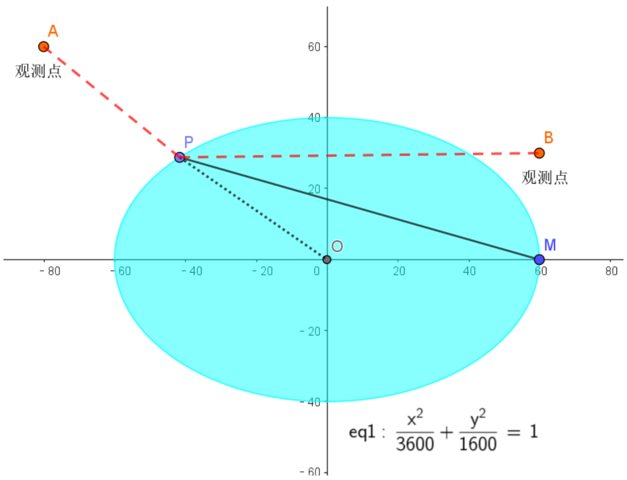

图2.2 泳池问题模型图

GeoGebra辅助代数表达

教师通过 GeoGebra可视化，将实际问题转化为数学模型，并根据问题链 T3、T4，启发学生用参数方程和代数表达式来刻画约束条件。

因为 $P(60\cos\theta,40\sin\theta)$，令 $t=\cos\theta,\theta\in(0,2\pi)$，则 $P(60t,40\sqrt{1-t^2})$。

由余弦定理建立约束条件：

$\cos\angle OPM=\frac{(3600t^2+1600(1-t^2))+(3600(t-1)^2+1600(1-t)^2)-3600}{2\sqrt{3600t^2+1600(1-t)^2}\cdot\sqrt{3600(t-1)^2+1600(1-t)^2}}\le\frac{1}{2}$，得到可行域 $t\in[-0.5,1]$。

根据约束条件，利用 GeoGebra进行动态演示，如图2.3：

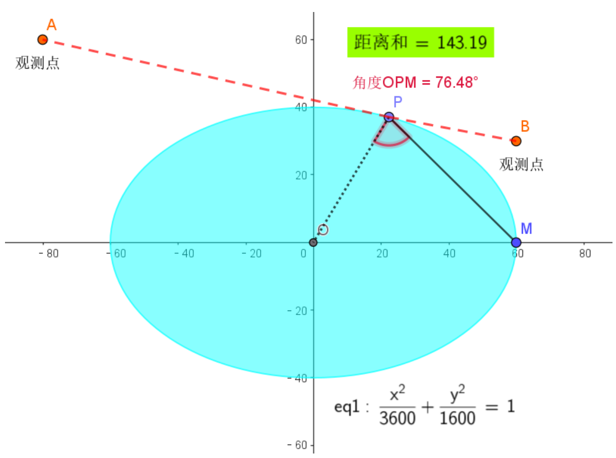

图2.3 PA+PB距离和及 $\angle OPM$ 动态演示

GeoGebra辅助验证模型

教师通过问题 T5，引导学生通过小组合作以及利用 GeoGebra可视化演示求解模型并验证最优解，使学生理解代数解与几何直观的统一。

将 PA+PB的距离转化为关于 t的函数 f(t)，通过对 f(t)求导可得最小值点 t=0.29，此时 $\angle OPM\approx73^{\circ},PA+PB\approx143$，在 $t\in[-0.5,1]$ 的可行域范围内，距离和角度均满足约束条件。利用 GeoGebra构建函数图像验证最小值的取值如图2.4。所以 PA+PB的最小值为143，此时 P点坐标为 (18,38)。

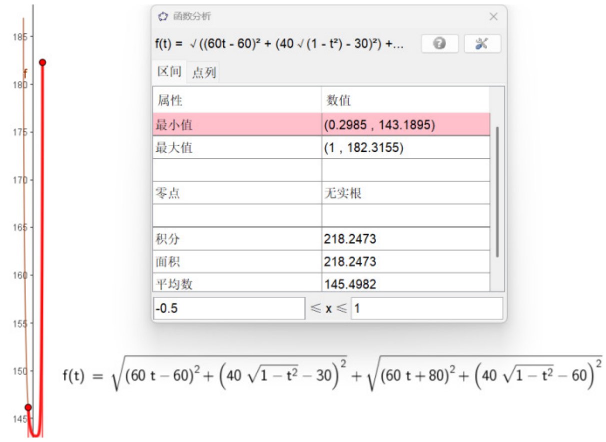

图2.4 f(t)函数及最小值图

变式驱动

教师通过拓展问题 T6，继续深化学生的建模能力，构建知识迁移图式。是在上述 T1-T5问题下建模思维的进一步跃迁。

对于改变观测点 A(–80,0)的坐标，同样可以建立关于 t的函数模型求最小值，此时 $f(t)=\sqrt{(60t-60)^2+(40\sqrt{1-t^2}-30)^2}+\sqrt{(60t+80)^2+(40\sqrt{1-t^2})^2}$。函数最小值取值为 t=0.74，PA+PB的最短距离为143.2。利用 GeoGebra动态演示验证发现，此时 P、A、B三点共线，所以 PA+PB的最短距离即为 A、B两点的距离。如图2.5：

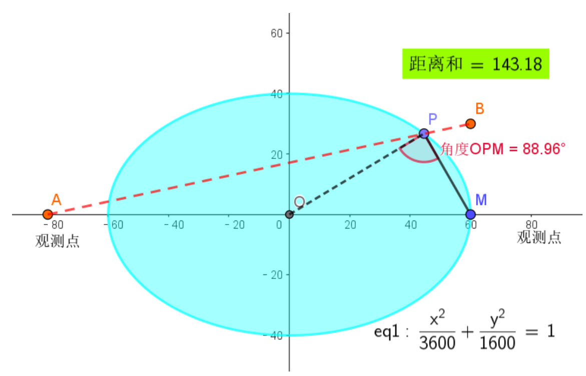

图2.5 变式问题 GeoGebra演示图

三、研究发现与分析

（一）学生数学建模素养发展

在 GeoGebra与对话式 AI融合教学的实践中，学生的数学建模素养呈现多维度提升，具体体现在建模流程的系统性与工具运用的协调性上。

首先，问题抽象能力显著增强。借助 AI生成的操作层问题与 GeoGebra动态演示，学生能快速从椭圆泳池等实际场景中提取关键要素，并通过参数化表达将现实问题转化为数学模型。在分析“线缆总长度最短”问题时，学生能自主关联椭圆参数与两点间距离公式，避免陷入“仅关注计算技巧而忽略模型本质”的误区，

多数学生能在短时间内完成从实际场景到几何模型的转化。

其次，模型构建与验证能力得到锻炼。过程层问题引导学生用代数推导与 GeoGebra 参数联动结合的方式，验证模型合理性。对象层问题的解决中，学生能综合运用函数求导、不等式约束等方法，借助 GeoGebra 的“极值工具”与“条件颜色标记”功能，精准定位满足最优解，形成“代数推导—可视化验证”的闭环思维，超过八成学生能独立完成模型验证过程。

最后，知识迁移能力逐步形成。图式层变式问题的探究中，学生能复用“参数化建模—约束转化—工具验证”的流程，调整 GeoGebra 操作，发现“三点共线时距离和最短”等规律，体现建模方法的普适性。

（二）学习体验反馈

学生对 GeoGebra 与对话式 AI 融合的教学模式反馈积极，主要体现在工具协同的便捷性与问题链引导的启发性上。

“AI 生成的问题链像阶梯，从拖动点 P 观察变化到推导距离函数，难度一步步提升，不会觉得突然”，多数学生认为分层问题帮助他们理清建模思路，减少了面对复杂问题时的畏难情绪。同时，GeoGebra 的动态可视化功能有效降低了抽象概念的理解门槛，有学生反馈：“通过颜色标记约束条件能直接看到哪些点满足角度范围，函数图像让距离和的变化规律一目了然，比单纯推导公式容易理解”，超过九成学生表示工具的使用让建模过程“更直观、可操作”。

此外，学生对“AI 辅助设计 +GeoGebra 实践”的协同模式认可度较高，认为这种方式既保留了自主探究的空间，又能通过 AI 生成的问题提示避免思维卡顿，增强了解决复杂建模问题的信心，课堂主动提问次数较传统教学模式明显增加。

（三）教学效果分析

从教学实践数据看，融合教学模式对提升建模教学质量的效果显著：

在学业表现上，参与实验的学生在椭圆建模问题测试中，“模型构建完整性”和“工具运用合理性”两项指标的表现显著优于传统教学组，尤其在多约束问题的解决中优势更明显，学生能更快速地定位问题核心并选择恰当的建模方法。

在学习兴趣方面，课堂观察显示，学生主动参与 GeoGebra 操作、小组讨论的时长较传统课堂明显增加，更多学生愿意在课后尝试用建模方法解决生活中的实际问题，对数学建模的兴趣和认同感大幅提升，学习主动性持续增强

综上，GeoGebra 的可视化功能与对话式 AI 的问题链设计形成互补，既解决了建模过程中“抽象转化难”的痛点，又通过分层引导保障了探究的系统性，最终实现学生建模素养与学习主动性的双重提升。

四、结论与建议

（一）研究结论

1.融合教学模式有效提升数学建模素养

对话式 AI 与 GeoGebra 的协同应用，通过“问题链引导—动态可视化—探究实践”的流程，帮助学生掌握“现实问题抽象—数学模型构建—工具验证优化”的建模方法，显著提升了问题转化、模型验证及知识迁移能力，符合新课标对“数学建模核心素养”的培养要求。

2.工具协同优化教学效率

对话式 AI 辅助教师快速生成贴合学生认知的四阶问题链，减少了教学设计的盲目性；GeoGebra 的参数联动、动态演示功能，为抽象的建模过程提供了直观支撑，二者协同既发挥了对话式 AI 在教学资源设计中的辅助作用，又凸显了 GeoGebra 在可视化探究中的不可替代性。

3.为信息化建模教学提供实践范式

该模式突破了传统建模教学中工具碎片化应用、问题设计缺乏梯度的局限，形成“对话式 AI 辅助设计—GeoGebra 实施—反馈优化”的闭环，为高中数学建模课的信息化改革提供了可复制的操作路径。

（二）教学建议

1.教师层面：深化工具融合能力

教师应加强对对话式 AI 的指令设计能力，输入明确指令，提高问题链生成的精准度；同时熟练掌握 GeoGebra 的高阶功能，将其与建模流程深度绑定，避免工具应用流于形式。

2.研究者层面：拓展研究维度

未来可进一步探究不同学段中工具融合的适配性，或分析 AI 问题链的梯度设计与建模素养各维度的相关性，为优化教学模式提供更精细的实证依据。

3.技术开发者层面：优化功能设计

建议针对建模教学需求升级工具功能：如在 GeoGebra 中提供多元化插件，自动关联参数方程与距离公式；在对话式 AI 中嵌入“学生错误资源库”，生成问题链时针对性规避常见误区，提升工具的教学适配性。

综上，GeoGebra 与对话式 AI 的融合为高中数学建模素养培养提供了新路径。通过多方协同优化，有望推动建模教学从“知识传授”向“能力培养”转型，为学生应对复杂现实问题奠定数学基础。

参考文献

[1] 卢秀敏 . 教育信息化背景下高中数学建模教学的优化 [J]. 文理导航（中旬），2020,(05):2+4.

[2] 张文刚 . 高中数学建模教学存在的问题及其对策 [J]. 教学与管理 ,2020,(19):62-64.

[3] 中华人民共和国教育部 . 普通高中数学课程标准 [M].2017 年版 2020 年修订 . 北京 : 人民教育出版社 ,2020.6:97-99.

[4] 汪佳婕 . 基于 GeoGebra 软件的高中数学可视化教学实践研究 [J]. 中国教育技术装备 ,2025,(05):49-52.

[5] 王荣亮 , 王艳彩 . 基于 GGB 的指数函数可视化设计与实践研究 [J]. 电脑知识与技术 ,2024,20(26):102-104.

[6] 耿艳妮 . 基于 GeoGebra 平台的高中数学可视化教学研究 [J]. 中国新通信 ,2025,27(04):179-181.

[7] 张立磊 , 于萍 .GGB 短视频与高中数学传统教学的融合 [J]. 科教导刊 ,2024,(12):149-151.

[8] 刘明 , 吴忠明 , 廖剑等 . 大语言模型的教育应用 : 原理、现状与挑战——从轻量级 BERT 到对话式 ChatGPT[J]. 现代教育技术 ,2023,33(08):19-28.

[9]Bettayeb M A,Talib A M,Altayasinah S Z A,etal.Exploring the impact of ChatGPT:conversational AI in education[J].Frontiers in Education,2024,91379796-1379796.

[10] 焦颖 . 借他山之石 , 琢己身之玉——基于数学建模核心素养下一类圆锥曲线的最值问题 [J]. 试题与研究 ,2023,(33):19-21.

