凹多边形的有关性质

黄宇飞[1]，陈思远[2*]
1. 广州民航职业技术学院，广东 广州 510403
2. 广州市第七中学东山学校，广东 广州 510600

DOI: 10.61369/ETR.2025380025

摘　　要： 在平面内，由一些线段首尾顺次相连接组成的图形叫做多边形．多边形分为凹、凸两类，通常我们研究的是凸多边形的相关问题（如：在初中数学中，讨论了凸多边形及其内角和等问题）. 本文将研究多边形（包括凹、凸两类）的各种性质，包括内角和、外角和、对角线、周长与面积等问题．

关 键 词： 凹、凸多边形；内角和；外角和；对角线；周长与面积

Properties of Concave Polygons

Huang Yufei[1], Chen Siyuan[2]*
1.Guangzhou Civil Aviation College, Guangzhou, Guangdong 510403
2.Dongshan Campus, Guangzhou No.7 Middle School, Guangzhou, Guangdong 510600

Abstract： In a plane, a polygon is a closed figure formed by connecting several line segments end to end in sequence. Polygons can be classified into concave and convex types. In general, we often study problems related to convex polygons (for example, in junior high school mathematics, the sum of interior angles of convex polygons is discussed). This paper investigates various properties of polygons (including both concave and convex types), such as the sum of interior angles, the sum of exterior angles, diagonals, perimeter, and area.

Keywords： **concave and convex polygons; sum of interior angles; sum of exterior angles; diagonals; perimeter and area**

引言

本文所研究的几何图形均是平面图形。在平面内，由一些线段首尾顺次相连接组成的图形叫做多边形。我们把由 n 条线段组成的多边形称为 n 边形，其中 $n \geq 3$。多边形内相邻两边围成的角叫做它的内角。显然，一个内角的度数范围是大于0° 小于360° 。若一个内角的度数大于0° 且小于180° ，则称之为凸角，否则称其为凹角（即该角的度数大于等于180° 且小于360° ）。特别地，等于180° 的角称为平角，等于360° 的角称为周角。如果一个多边形的所有内角都是凸角，则称其为凸多边形，否则称之为凹多边形（即该多边形至少含有一个凹角）。图1所示分别为凸六边形和凹十边形，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是凸角，而 $\angle 3$ 为凹角。

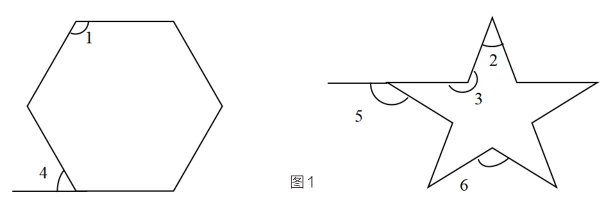


图1

对于多边形的凸角，其相应的外角定义为：一条边与它的邻边的延长线组成的在多边形外的角叫做外角。如图1，$\angle 4$ 和 $\angle 5$ 是外角。不难证明，一个外角与其相邻的内角构成了一个平角。而对于凹多边形中的凹角，其相应的外角有以下两种定义：①代数外角：类似于凸角相应的外角的代数特征，如果一个非正角（角度小于等于0° ）与一个凹角构成了一个平角，则称此非正角为该凹角的代数外角，即一个凹角相应的代数外角小于等于0° ，且它们的和等于180° ；②几何外角：围成凹角的两条邻边在凹多边形外构成的角称为这个凹角对应的几何外角，如图1的 $\angle 6$。连接多边形不相邻的两个顶点的线段，叫做多边形的对角线。

在初中数学中主要探讨了凸多边形及其内角和等问题。但是，关于凹多边形的研究一直比较少，本文将综合研究多边形（包括凹、凸两类）的各种性质，主要结果如下：

（1）证明了多边形（包括凹、凸两类）内角和的计算公式；

（2）研究了凸多边形的外角和，以及凹多边形的外角与代数外角（以及外角与几何外角）之和；

（3）讨论了多边形对角线的相关问题；

（4）探讨了正凸（及正凹）多边形的内角、边长、周长与面积等问题。

项目基金：广州市教育研究院“2+2+1”教研帮扶课题（项目编号：2024jybf11）阶段性研究成果；广州民航职业技术学院科研带头人培养计划专项项目（No.24X4403）。
作者简介：黄宇飞（1985-），男，广东韶关人，教授，博士，主要从事组合数学、图论和数学建模方向研究；
通讯作者：陈思远（1983-），女，广东广州人，一级教师，硕士，主要从事中学数学相关研究。

凹、凸多边形的性质

凸 n 边形内角和的计算公式是我们熟悉的，文献 [1] 采用了将凸多边形划分为三角形的三种方法（选取凸多边形的顶点，其边上一点或凸多边形内的一点作辅助线进行划分）给予了证明。在本文中，我们将用归纳法给出凸 n 边形内角和的计算公式一个更为简单的证明。

引理2.1[1,2]（三角形内角和定理）三角形三个内角的和等于 180° 。

定理2.2[1] 凸 n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180^\circ$ ，其中 $n\geq 3$ 。

证明：（归纳法）由引理2.1，凸3边形（即三角形）的内角的和等于 180° 。假设 $n=k\geq 3$ 时结论成立，即凸 k 边形的内角和等于 $(k-2)\cdot 180^\circ$ 。若 $n=k+1$ ，对于一个凸 $k+1$ 边形，任取一个顶点 O ，记其两个邻点为 P 和 Q ，连接 PQ 。显然，$\angle P$ 和 $\angle Q$ 分别被分成了两个小于 180° 的角。因此，凸 $k+1$ 边形被分成了一个凸 k 边形和一个三角形。结合引理2.1和归纳假设，我们可得：凸 $k+1$ 边形的内角和等于 $(k-2)\cdot 180^\circ+180^\circ=(k-1)\cdot 180^\circ$ 。结论得证。■

在证明凹多边形内角和的计算公式之前，我们先研究一下凹 n 边形中凸角与凹角的数目，其中 $n\geq 4$ 。

定理2.3 凹 n 边形（ $n\geq 4$ ）最少有1个凹角，即最多有 $n-1$ 个凸角；凹 n 边形（ $n\geq 4$ ）最少有3个凸角，即最多有 $n-3$ 个凹角。
证明：根据凹 n 边形的定义，其最少有1个凹角，即最多有 $n-1$ 个凸角。

下面我们证明凹 n 边形（ $n\geq 4$ ）最少有3个凸角，即最多有 $n-3$ 个凹角。对于一个凹 n 边形（ $n\geq 4$ ），将其边看作轨迹．若一物体从某一顶点沿其某一邻边出发（不妨假设为沿逆时针方向移动），由于凹 n 边形是一个封闭图形，该物体最终回到出发点（并转向出发时的方向），此时其逆时针转动的角度恰为 360° 。由于行经凹角可看作顺时针转动，行经凸角则看作是逆时针转动。若假设凹 n 边形（ $n\geq 4$ ）最多有2个凸角，由凸角定义知其度数大于 0° 且小于 180° ，可得该物体逆时针转动的角度小于 $360^\circ-\alpha$ ，其中 α 为行经凹角转动的度数和。因为凹 n 边形最少有1个凹角，故 $\alpha\geq 0$ ，从而该物体逆时针转动的角度小于 360° ，矛盾。故凹 n 边形（ $n\geq 4$ ）最少有3个凸角，即最多有 $n-3$ 个凹角。■

定理2.4 凹 n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180^\circ$ ，其中 $n\geq 4$ 。

证明：由定理2.3，凹四边形其有3个凸角和1个凹角（见图2），设凹角的顶点为 A ，其两个邻点分别为 B 和 C 。连接 BC ，凹四边形变成了一个三角形，且凹四边形的内角和减去 180° 等于三角形的内角和（见图2， $\angle 1=\angle 2+\angle 3$ ）。结合引理2.1，可得凹四边形的内角和为 360° 。

假设 $n=k\geq 4$ 时结论成立，即凹 k 边形的内角和等于 $(k-2)\cdot 180^\circ$ 。若 $n=k+1$ ，对于一个凹 $k+1$ 边形，根据定理2.3知其至少有一个凹角。设一个凹角的顶点为 A ，其两个邻点分别为 B 和 C 。连接 BC ，凹 $k+1$ 边形变成了一个凹 k 边形或凸 k 边形（见图2），且凹 $k+1$ 边形的内角和减去 180° 等于凹 k 边形（或凸 k 边形）的内角和（见图2， $\angle 4=\angle 5+\angle 6$ ）。根据归纳假设和定

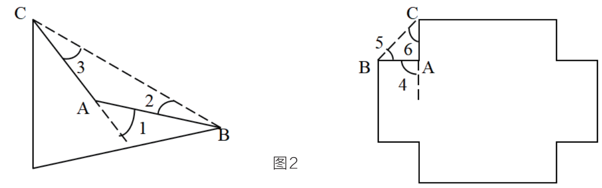


图2

理2.2，可得：凹 $k+1$ 边形的内角和等于 $(k-2)\cdot 180^\circ+180^\circ=(k-1)\cdot 180^\circ$ 。定理得证。■

由定理2.2和定理2.4，容易推出以下重要结论。

推论2.5 （凹、凸） n 边形的内角和都等于 $(n-2)\cdot 180^\circ$ ，其中 $n\geq 3$ 。

关于多边形的外角和问题，我们有以下的结论。

定理2.6[1] 凸多边形的外角和等于 360° 。

证明：根据凸多边形外角的定义，可知一个内角与其相应的外角之和是 180° 。结合定理2.2，凸 n 边形的的内角和等于 $(n-2)\cdot 180^\circ$ ，可得凸 n 边形的外角和等于 $n\cdot 180^\circ-(n-2)\cdot 180^\circ=360^\circ$ ，其中 $n\geq 3$ 。■

定理2.7 凹多边形的所有外角与代数外角之和等于 360° ，其中 $n\geq 4$ 。

证明：由凹多边形的外角与代数外角的定义，一个凸角与其相应的外角之和是 180° ，且一个凹角与其相应的代数外角之和也是 180° 。根据定理2.4，凹 n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180^\circ$ ，故凹 n 边形的所有外角与代数外角之和等于 $n\cdot 180^\circ-(n-2)\cdot 180^\circ=360^\circ$ ，其中 $n\geq 4$ 。■

定理2.8 恰有 t 个凸角的凹 n 边形的所有外角与几何外角之和等于 $(n-t+2)\cdot 180^\circ$ ，其中 $n\geq 4$ 且 $3\leq t\leq n-1$ 。

证明：根据凹多边形的外角与几何外角的定义，一个凸角与其相应的外角之和是 180° ，而一个凹角与其相应的几何外角之和是 360° 。由定理2.4，凹 n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180^\circ$ ，从而可得恰有 t 个凸角的凹 n 边形的所有外角与几何外角之和等于 $t\cdot 180^\circ+(n-t)\cdot 360^\circ-(n-2)\cdot 180^\circ=(n-t+2)\cdot 180^\circ$ ，结合定理2.3，其中 $n\geq 4$ 且 $3\leq t\leq n-1$ 。■

由定理2.8，容易得到以下推论：

推论2.9 若凹 n 边形的外角与几何外角之和等于 α ，则 $540^\circ\leq\alpha\leq(n-1)\cdot 180^\circ$ ，其中 $n\geq 4$ 。特别地，凹四边形的外角与几何外角之和等于 540° 。

下面的定理研究了多边形的对角线的数目。

定理2.10[1] 设一个 n 边形的对角线的数目为 β 条，则 $0\leq\beta\leq\dfrac{n^2-3n}{2}$ ，其中 $n\geq 3$ ．特别地，3边形（即三角形）没有对角线。

证明：由多边形对角线的定义，任取 n 边形的两个不相邻的顶点可以连接得到一条对角线。从而，n 边形对角线的数目 β 的范围是：$0\leq\beta\leq\dbinom{n}{2}-n=\dfrac{n^2-3n}{2}$ ，其中 $n\geq 3$ 。特别地，三角形的对角线的数目 $\beta=0$ 。■

定理2.11 一个凸 n 边形的对角线均不相交，则其对角线的数目最多为 $n-3$ 条，其中 $n\geq 3$ 。

证明：我们对 n 作归纳法。当 $n=3$ 时，三角形（即凸3边形）没有对角线。假设定理结论对于 $n=k\geq 3$ 时成立，即凸 k 边形的不相交的对角线的数目最多为 $k-3$ 条，我们需要证明凸 $k+1$ 边形的不相交的对角线的数目最多为 $k-2$ 条。对于凸 $k+1$ 边形，任取一个顶点 O ，记其两个邻点为 P 和 Q ，连接 PQ 。显然，$\angle P$ 和 $\angle Q$ 分别被分成了两个小于 180° 的角。因此，凸 $k+1$ 边形被分成了一个凸 k 边形和一个三角形。由于任意一条以 O 点为顶点的对角线都会与 PQ 有交点，即除了对角线 PQ ，其余对角线均在凸 k 边形中产生 . 根据归纳假设，故凸 $k+1$ 边形的不相交的对角线的数目最多为 $(k-3)+1=k-2$ 条。■

各个内角都相等且各条边都相等的凸多边形称为正凸多边形。各个凸角都相等，各个凹角也都相等，且凸角和凹角交错排列且个数相等，各条边都相等的凹多边形称为正凹多边形 . 正多边形的中心角是指分别连接正多边形外接圆的圆心与正多边形的两个相邻顶点所形成的角 . 下面我们来研究正凸（及正凹）多边形的内角、中心角、边长、周长与面积等问题。

定理2.12 正凹多边形至少含有6条边，且边的数目一定是偶数。

证明：由正凹多边形的定义，其角的数目必然是偶数，从而边的数目也一定是偶数 . 另外，由定理2.3知正凹多边形至少有3个凸角，又因为凹角与凸角的数目相同，故正凹多边形至少有6个角，从而至少含有6条边。■

定理2.13 正凸 n 边形的内角为 $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$ ，其中 $n\geq 3$ ；正凹 n 边形有 $\frac{n}{2}$ 个凸角和 $\frac{n}{2}$ 个凹角，且一个凸角与一个凹角之和为 $\frac{(n-2)\cdot 360^\circ}{n}$ ，其中 n 是偶数且 $n\geq 6$ 。

证明：根据正凸多边形和正凹多边形的定义，结合定理2.2，定理2.4与定理2.12，不难证得定理2.13的结论成立。■

定理2.14 正凸（及正凹） n 边形的中心角等于 $\frac{360^\circ}{n}$ ，其中 $n\geq 3$ 。

证明：对于正凸 n 边形，其有 n 个大小相等的中心角，且它们恰好构成一个周角（见图3)，故正凸多边形的中心角等于 $\frac{360^\circ}{n}$. 对于正凹 n 边形，一个中心角与半个凸角，半个凹角恰好在一个三角形中，故其和恰好是 180°（见图4). 所以，根据定理2.13，正凹 n 边形的中心角等于 $180^\circ-\frac{(n-2)\cdot 360^\circ}{2n}=\frac{360^\circ}{n}$ 。■

定理2.15 以下关于正凸 n（ $n\geq 3$ ）边形的命题是等价的：

（1）正凸 n 边形的外接圆半径是 r ；

（2）正凸 n 边形的边长是 $2r\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$ ；

（3）正凸 n 边形的周长是 $2nr\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$ ；

（4）正凸 n 边形的面积是 $\frac{1}{2}nr^2\sin\frac{360^\circ}{n}$ 。

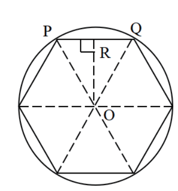


图3

证明：设正凸 n 边形的外接圆圆心是 O ，取正凸 n 边形的两个相邻的顶点 P 和 Q ，连接 OP 和 OQ ，作 OR 垂直于 PQ 于 R . 由于 ΔOPQ 是等腰三角形，故 OR 是底边 PQ 的高和中线，也是 $\angle POQ$ 的角平分线（见图3)。

(1) $\Leftrightarrow$ (2) 由定理2.14，可知正凸 n 边形的中心角等于 $\frac{360^\circ}{n}$ ，故 $\angle POR=\frac{180^\circ}{n}$. 由于 ΔOPR 是直角三角形，可得外接圆半径 $OP=r$ 等价于 $PR=r\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$ ，即等价于正凸 n 边形的边长是 $2r\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$ 。

(2) $\Leftrightarrow$ (3) 显然，正凸 n 边形的边长是 $2r\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$ 等价于周长等于 $2nr\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$ 。

(1) $\Leftrightarrow$ (4) 根据定理2.14，可知正凸 n 边形的中心角等于 $\frac{360^\circ}{n}$. 故正凸 n 边形的外接圆半径是 r 等价于 ΔOPQ 的面积是 $\frac{1}{2}r^2\sin\frac{360^\circ}{n}$ ，故也等价于正凸 n 边形的面积是 $\frac{1}{2}nr^2\sin\frac{360^\circ}{n}$ 。

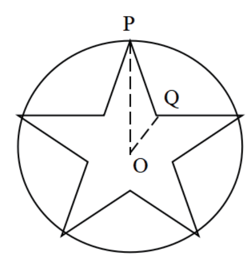
综上可得，(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4)，定理得证。■

定理2.16 若正凹 n 边形的凸角角度为 α ，则其凹角角度为 $\frac{(n-2)\cdot 360^\circ}{n}-\alpha$ ，其中 n 为偶数且 $n\geq 6$ 。另外，以下关于凸角角度为 α 的正凹 n 边形的命题是等价的：

（1）正凹 n 边形的外接圆半径是 r ；

（2）正凹 n 边形的边长是 $\frac{r}{\sin\left(\frac{360^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}$ ；

（3）正凹 n 边形的周长是 $\frac{nr}{\sin\left(\frac{360^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}$ ；



（4）正凹 n 边形的面积是 $\frac{1}{2}\cdot\frac{nr^2}{\sin\left(\frac{360^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ 。

图4

证明：若正凹 n 边形的凸角角度为 α ，根据定理2.13，其凹角角度为 $\frac{(n-2)\cdot 360^\circ}{n}-\alpha$. 设正凹 n 边形的外接圆圆心是 O ，取正凹 n 边形的两个相邻的顶点 P 和 Q ，连接 OP 和 OQ（见图4)，则 $\angle OPQ=\frac{\alpha}{2}$ 。

(1) $\Leftrightarrow$ (2) 根据定理2.14，正凹 n 边形的中心角等于 $\frac{360^\circ}{n}$ ，故 $\angle POQ=\frac{360^\circ}{n}$ 。又因为 $\angle PQO=\frac{(n-2)\cdot 360^\circ}{2n}-\frac{\alpha}{2}$ ，由正弦定理可得，外接圆半径 $OP=r$ 等价于边长 $PQ=\frac{r}{\sin\left[\frac{(n-2)\cdot 360^\circ}{2n}-\frac{\alpha}{2}\right]}\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}=\frac{r}{\sin\left(\frac{360^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}$ 。

(2) $\Leftrightarrow$ (3) 显然，正凹 n 边形的边长是 $\frac{r}{\sin\left(\frac{360^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}$ 等价于其周长等

于 $\dfrac{nr}{\sin\left(\dfrac{360^\circ}{n}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}\cdot\sin\dfrac{360^\circ}{n}$。

(2) $\Leftrightarrow$ (4) 正凹 n 边形的边长是 $\dfrac{r}{\sin\left(\dfrac{360^\circ}{n}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}\cdot\sin\dfrac{360^\circ}{n}$ 等价于 ΔOPQ 的面积是 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{r^2}{\sin\left(\dfrac{360^\circ}{n}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}\cdot\sin\dfrac{360^\circ}{n}\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}$，故也等价于正凹 n 边形的面积是 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{nr^2}{\sin\left(\dfrac{360^\circ}{n}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}\cdot\sin\dfrac{360^\circ}{n}\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}$。

综上可得，(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4)，定理得证。

参考文献

[1] 义务教育课程标准实验教科书：《数学（七年级下册）教师教学用书》，课程教材研究所与中学数学课程教材研究开发中心编著，人民教育出版社，2007年9月，第2版.

[2] 义务教育课程标准实验教科书：《数学（七年级下册）》，课程教材研究所与中学数学课程教材研究开发中心编著，人民教育出版社，2007年3月，第3版.

[3] 王雪洁. 多边形内角和，外角和定理专练 [J]. 初中生学习指导，2024(20):26-27.

[4] 邵传经. 深度研究合理整合 ——以"多边形的内角和与外角和"为例 [J]. 中学数学：初中版，2022(7):3.

[5] 李冬明. 在探索规律活动中发展数学核心素养 ——以"多边形的内角和与外角和"为例 [J]. 数学大世界（下旬版），2021(3):48-48.

[6] 张俊. 立足"一以贯之"实现"数学相通"——以"多边形的内角和，外角和的证明"为例 [J]. 2024(6):48-49.

[7] 郭健，刘丹丹. 多边形的内角和与外角和的应用 [J]. 初中生学习指导，2023(23):18-19.

[8] 莫其源. 基于问题驱动的整合教学实践 -- 以"多边形的内角和，外角和"为例 [J]. 中学数学教学参考，2023(6):18-20.

[9] 赵瑞霞. 探索多边形的内角和的弦外音 [J]. 文学少年，2020(35):0284-0284.

[10] 中学生数理化（中考版），School Journal of Mathematics，Physics and ChemistryJunior High School Ed，等. 多边形和特殊四边形 [J]. 中学生数理化（初中版），2022(6):10-13.

